La Ley de Lotka: aplicaciones del modelo Lagrangian Poisson a la productividad de autores

RUBÉN URBIZAGÁSTEGUI ALVARADO
Universidad de California, Riverside
Riverside, CA 97521-5900, USA
E-mail: ruben@ucrac1.ucr.edu

RESUMEN

Describe la naturaleza de la distribución de Lagrangian Poisson según fue desarrollada por Janardan & Schaeffer. Ofrece las ecuaciones específicas para los casos en que las frecuencias de cero observaciones están presentes en la muestra recolectada. Como en el campo de la bibliometría es poco común encontrarse con datos de este tipo, se describe paso a paso la forma de aplicación del modelo a los datos estudiados por Targino & Caldeira sobre la producción de los docentes de la Universidad Federal de Piauí, Brasil. La prueba del x^2 fue usada para ajustar los datos que van de los observados a los esperados. Con una tasa de dispersión $g_2 = 0.53925$ y una tasa de atracción $g_1 = 0.112054$, a un nivel de 0.05 de significancia y 3 grados de libertad, se verificó que el valor crítico del x^2 fue igual a 7.81473, mayor que el valor del x^2 calculado de 6.027. Por tanto se concluye que la productividad de los profesores se ajusta muy bien al modelo Lagrangian Poisson.

Palabras-claves: Ley de Lotka, Distribución Lagrangian Poisson, Productividad de autores, Bibliometría, Universidad Federal de Piauí, Brasil, Informetría, Cientometría.

Artículo

LOTKA'S LAW: APPLICATION OF THE LAGRANGIAN POISSON DISTRIBUTION MODEL TO AUTHOR'S PRODUCTIVITY

RUBÉN URBIZAGÁSTEGUI-ALVARADO

ABSTRACT

Describes the Lagrangian Poisson distribution as developed by Janardan & Schaeffer with specific equations for cases when zero observations are present in the data collected. To illustrate the application process, data collected and studied by Targino & Caldeira on Brazilian literature produced by professors at the Federal University of Piaui is replicated. The x^2 test was used to fit observed to expected values. With a dispersion rate of $g_2 = 0.53925$, an attraction rate of $g_1 = 0.112054$, at 0.05 level of significance and 3 degrees of freedom, it was found that x^2 critical value was equal to 7.81473 higher than estimated x^2 of 6.027. Therefore, it was concluded that data fits well to Poisson Lagrangian model.

Key Words: Lotka's law, Lagrangian Poisson distribution model, Author's productivity, Bibliometrics, Federal University of Piaui, Brazil, Informetrics, Scientometrics

INTRODUCCIÓN

El objetivo de este trabajo es proporcionar una guía didáctica para analizar y probar la ley de Lotka sobre la productividad científica de los autores usando el modelo Lagrangian Poisson. A pesar de que en la literatura extranjera es ampliamente conocido, este modelo ha sido poco explorado en las prácticas bibliométricas latinoamericanas. Tal vez ese hecho se deba a la falta de familiaridad con los modelos estadísticos o al desconocimiento de los instrumentos matemáticos para probar los datos. Es sabido que desentrañar modelos estadísticos no es el pasatiempo favorito de ningún bibliotecario. Por eso consideramos importante la elaboración de esta guía, tenemos la esperanza de ayudar a la comprensión, adopción y aplicación de este modelo.

Los estudios sobre la productividad de los autores no son privativos de la bibliotecología y la ciencia de la información sino también hechos por psicólogos y sociólogos pero en distintas direcciones. Mientras que los psicólogos están más interesados en explorar el mundo de la creatividad, los factores cognitivos que hacen posible la existencia de los "genios" y la "inteligencia", los sociólogos apuntan a las condiciones sociales que hacen posible la producción estratificada y desigual en la ciencia. En cambio, los bibliotecólogos están más interesados en las "publicaciones" (tesis, libros, artículos, trabajos presentados en congresos o publicados como capítulos de libros y similares) como productos acabados y objetivados en un documento bibliográfico, sobre los resultados de la investigación científica. La contabilización y el trazado de la producción de esos documentos y los autores que las produjeron en una distribución de frecuencias produce una relación monotónica negativa entre ambas variables, es decir, mientras que el número de las producciones (contribuciones) aumenta, el número de los autores (contribuyentes) disminuye. Observando esta relación monotónica negativa en la literatura de física y química, Lotka (1926) estableció los fundamentos estadísticos del modelo que después vendría a ser conocido como el modelo del cuadrado inverso, afirmando que el número de autores que hacen n contribuciones en un determinado campo científico, es aproximadamente $1/n^2$ de aquellos que hacen una sola contribución, y que la proporción de aquellos que hacen una única contribución es de más o menos el 60%. A esta proposición se ha convenido en denominarla la ley del cuadrado inverso o Ley de Lotka.

Desde la época en que Lotka estableció este modelo, muchos estudios han sido realizados para investigar la productividad de los autores en distintas disciplinas. Hasta diciembre del año 2000 aproximadamente, 250 trabajos entre artículos, monografías, capítulos de libros, comunicaciones a congresos y literatura gris, habían sido producidos para criticar, replicar o reformular este modelo bibliométrico (Urbizagástegui & Lane, 2002). Para hacer ese levantamiento, estos autores elaboraron una exhaustiva bibliografía transnacional buscando referencias en bases de datos como ISA, LISA, Library Literature, MAGS (Magazines & Journals), Current Contents, ERIC, PsyInfo, Compendex, Agrícola, Biosis, Inspec, Hapi, Dialog, Pascal, Uncover, Sociological Abstracts, así como bases de datos del CINDOC (España), LICI del IBICT (Brasil) e INFOBILA (México). Sin embargo, a pesar de las numerosas investigaciones realizadas sobre este asunto, los resultados aún son contradictorios, conflictivos, inconclusos, y parecen no proporcionarle una clara validez a esta ley. Por ejemplo, Oppenheim (1986) afirma que "debe enfatizarse que la Ley de Lotka ha sido probada en muchas colecciones de datos, sin embargo el ajuste no siempre ha sido bueno". También Nicholls (1989: 383) reclama que "los resultados de esos estudios son incomparables debido a diferencias substanciales en la forma de la medición, estimación de los parámetros, formas de pruebas, y aun a la interpretación del modelo". Este punto no ha sido lo suficientemente recalcado en la bibliografía publicada hasta ahora, aunque las revisiones del estado-del-arte de Vlachy (1980) y Potters (1981) hayan contribuido para reorientar el interés de los investigadores hacia otros tipos de distribuciones que pueden proporcionar mejores ajustes de los datos. Esta reorientación de intereses llevó a introducir en las investigaciones modelos estadísticos usados y experimentados exitosamente en las ciencias naturales, como la distribución hiperbólica, la distribución logarítmica, la distribución de Yule, la distribución binomial, la distribución binomial negativa, la serie geométrica, la serie logarítmica, la distribución de Weinbull, la distribución de Waring, la distribución de Poisson, la distribución de Poisson lognormal, la distribución truncada de Poisson y finalmente la distribución inversa generalizada de Gauss-Poisson.

Juntamente con esas críticas, han aparecido desacuerdos relacionados con las tres posibles formas de realizar el conteo en la recolección de los datos relativos a autoría múltiple. El conteo directo, cuando solamente los autores "senior" o principales (los autores nombrados en primer lugar) son acreditados con la contribución y los autores secundarios (colaboradores) es ignorado; el conteo completo, cuando cada autor (principal y/o secundario) es acreditado con una contribución; y el conteo ajustado, cuando cada autor (principal y/o secundario) es acreditado con una fracción o porción de la contribución total, es decir, si se identificasen 5 autores de un único artículo, cada autor seria acreditado con 1/5 o una quinta parte del artículo. No obstante, algunos autores afirman que el conteo directo y el conteo ajustado no producen diferencias esenciales y que "los dos medios de conteo producen la misma cosa y que por eso no sería necesario considerar el conteo ajustado y que se debería prestar mayor atención al conteo directo" (Nath & Jackson, 1991: 207). Pao (1985) resalta el hecho de que "no existe un método uniforme para la recolección y organización de los datos" para probar la Ley de Lotka, así como que "muchos investigadores simplemente dieron 2 como el valor de *n* sin estimar el valor de los datos observados". Esta preferencia es atribuida al hecho de que los procedimientos de cálculo realizados de esa manera eran muy simples y fáciles de realizar. La misma autora afirma también que "muchos investigadores evitaron hacer una prueba apropiada del grado de ajuste de los datos observados" frente a los datos esperados; como consecuencia, Vlachy (1974) habría encontrado serias discrepancias entre los datos observados y el ajuste de la ley del cuadrado inverso.

Otro punto de discusión entre los autores se refiere al periodo cubierto por los datos recolectados para análisis. Algunos estudios usaron datos que cubrían sólo uno o dos años mientras que otros usaron datos que cubren un largo periodo de la historia de un asunto. Estos hechos posibilitarán que Potter (1981), en una extensa revisión de la literatura sobre la Ley de Lotka, afirma se que "cuando el periodo de cobertura es diez años o más y la comunidad de autores es definida ampliamente, la productividad de los autores se aproxima a la distribución de frecuencias que observó Lotka y que es conocida como la Ley de Lotka". Esa afirmación ha llevado a los investigadores a sugerir una cobertura de diez años o más como la más adecuada para aplicar el modelo de Lotka y los estudios sobre la productividad de los autores.

Entre los años de 1926 y 1970, las investigaciones sobre la productividad de los autores fueron esporádicas, pero a comienzos de la década de los 1970, el interés por la aplicación del modelo a la productividad científica fue retomado por Vlachy (1970), Naranan (1971), Turkeli (1973) Terrada (1973) y Murphy (1973). A partir de esa década, los estudios sobre la productividad de los autores se volvieron más serios y en cierto modo más científicos, tanto que el modelo del Lotka fue probado en muchas áreas que incluían bases de datos de patentes (Oppenheim, 1986), aceites lubricantes (López Calafi; Salvador y Guardia, 1985), educación superior (Budd, 1988), música popular (Cook, 1989), finanzas (Chung & Cox, 1990), economía (Cox & Chung, 1991), contabilidad (Chung; Pak & Cox, 1992), industria musical (Cox; Felton & Chung, 1995), psiquiatría (López-Muñoz & Rubio Valladolid, 1995), psicofisiología (Sánchez-Hernández; et el., 1996), Glándula Pineal y melatonina (López-Muñoz; *et al.*, 1996), bibliotecología y ciencia de la información española (Jiménez Contreras & Moya Anegón, 1997), genética (Gupta; Kumar & Rousseau, 1998), bibliometría (Urbizagástegui Alvarado, 1999), antropología (Urbizagástegui Alvarado & Oliveira, 2001). Pero los datos de estas investigaciones varían mucho y van desde datos tomados de bibliografías exhaustivas como las de entomología (Gupta, 1987) o una investigación sobre la papa (Gupta; *et al.*, 1996) hasta datos tomados de un grupo de revistas (Nath & Jackson, 1991) y hasta de una única revista (Murphy, 1973; Carpintero, *et al.*, 1977; Gisbert Tio & Valderrama Zurian, 1994; Urbizagástegui & Cortés, 2002). Esas discrepancias sobre la cobertura de la literatura recopilada, la forma de medición, la estimación de los parámetros, la forma de prueba, y la interpretación del modelo, muestran a las claras la necesidad de una normalización. En general los autores están de acuerdo en que para una correcta aplicación del modelo de Lotka se deben tener en cuenta las siguientes recomendaciones:

a) Seleccionar un campo de producción científico específico. Cuanto más específico es el campo seleccionado mejor es el resultado.
b) Seleccionar una bibliografía existente o elaborar una sobre ese campo específico cuya cobertura sea exhaustiva. Cuanto más extensa y exhaustiva mejor. Se sugiere que la cobertura de esa bibliografía sea mayor o igual a diez años.

c) Realizar la contabilización de la productividad realizada por cada autor incluyendo a los coautores. Esto significa que se debe adoptar el método del conteo completo.
d) Ordenar los datos en una tabla de frecuencias que facilite la visualización de los datos observados recolectados.
e) Seleccionar el modelo estadístico más adecuadamente sugerido por los datos ordenados en la tabla de frecuencias.
f) Calcular los valores esperados o teóricos siguiendo las especificaciones del modelo estadístico seleccionado.
g) Establecer las hipótesis a ser probadas y la región de rechazo de esas hipótesis al nivel de significancia de α=.05
h) Probar la bondad del ajuste de los datos usando la prueba de ajuste chi-cuadrado o Kolmogorov-Smirnov.

Es necesario resaltar que en las últimas décadas otros investigadores han explorado diferentes modelos estadísticos que también pueden ser usados para describir la distribución de la productividad de los autores, especialmente cuando en la distribución de frecuencias observadas han sido recolectados autores que no han mostrado producción de trabajos publicados en el periodo estudiado; es decir, cuando las muestras incluyen cero producciones en la primera frecuencia de la distribución. Uno de esos modelos es conocido como la distribución Lagrangian Poisson que es el que vamos analizar y aplicar a la productividad de autores en este trabajo

NATURALEZA DE LA DISTRIBUCIÓN LAGRAGIAN POISSON

En la literatura estadística y biológica es conocido que lo que caracteriza la distribución de Poisson es la igualdad entre la media y la varianza. Ese hecho hace que el *índice de dispersión* sea igual a la unidad. Esta constatación ha llevado a la práctica común de suponer que si el *índice de dispersión* es igual a 1, la distribución de frecuencias se ajustará a la distribución de Poisson, que si el *índice de dispersión* es menor a 1 se ajustará a la distribución binomial positiva y que si el *índice de dispersión* es mayor a 1 se ajustará a la distribución binomial negativa.

La distribución de Poisson es producida por eventos que ocurren aleatoria e independientemente unos de los otros en un determinado periodo. La ocurrencia o no de un evento no tiene ningún efecto en la ocurrencia o no ocurrencia de un evento subsecuente. Si la ocurrencia de un evento particular altera se o influye se la probabilidad de ocurrencia de un evento subsecuente, entonces la distribución de esos eventos podría exhibir subdispersión o superdispersión con relación a la distribución de Poisson y dar origen a la distribución Lagrangian Poisson.

La distribución Lagrangian Poisson proporciona un modelo que se ajusta muy bien a datos experimentales caracterizados por la superdispersión, subdispersión o aun la ausencia de dispersión. El *índice de dispersión* de la distribución Lagragian

Poisson puede ser mayor, menor o igual a la unidad. Pero eso no tiene ninguna importancia ni peso en la distribución de frecuencias. Es más, la distribución Lagragian Poisson como miembro de las distribuciones discretas es fácil de usar y es más poderosa que la distribución de Poisson. Es usada como una alternativa al pobre ajuste de la distribución de Poisson a los datos observados. Cole (1946) y Consul & Jain (1973) estudiaron e introdujeron este modelo en la literatura de biología, pero fueron Janardan & Schaeffer (1977) y Janardan; Kester & Schaeffer (1979) quienes describieron ésta distribución en la forma de la siguiente ecuación:

$$N_k = N\left[\frac{g_1\left(g_1 + g_2 k\right)^{k-1} e^{-(g_1+g_2k)}}{k!}\right]$$

donde,

k = es la frecuencia de las clases 0, 1, 2, 3, ... n

e = es la base de los logaritmos naturales, 2.71828

N = es el número total de los valores observados

g_1, es la *tasa de atracción* del proceso Poisson que afecta el movimiento de las variables independientes hacia las variables dependientes. Por ejemplo, el movimiento de los autores hacia la producción de artículos. Cuanto más autores existan propensos a la producción de artículos, tendremos más artículos. Cuanto menos autores propensos a la producción de artículos, tendremos menos artículos. Entonces, g_1 es la *tasa de atracción* de autores hacia la producción de artículos.

g_2, es una función compleja de la tasa de competición o *repulsión*. En el caso de los autores sería la tasa de competición o repulsión hacia la producción de artículos más atractivos o de mayor visibilidad, que ayuden a la creación de la autoridad o competencia en el área. Sin embargo, hay que tener en cuenta que cuando la tasa de competición g_2 es igual a cero, la distribución Lagrangian Poisson es la misma que la simple distribución de Poisson.

En esta ecuación (1), $k!$ representa el factorial de los valores observados de k = 0, 1,2,3,…n. Este factorial es calculado de la siguiente manera:

Para k = 0! = 1

Para k = *1! = 1_1 = 1*

Para k = *2! = 2_1 = 2*

Para k = *3! = 3_2_1 = 6*

Para k = *4! = 4_3_2_1 = 24*

Para k = *5! = 5_4_3_2_1 = 120*

Para k = *6! = 6_5_4_3_2_1 = 720*

Para k = *7! = 7_6_5_4_3_2_1 = 5040*

Para k = *8! = 8_7_6_5_4_3_2_1 = 40320*

Para k = *9! = 9_8_7_6_5_4_3_2_1 = 362880*

Para k = *10! = 10_9_8_7_6_5_4_3_2_1 = 3628800* y así sucesivamente para todos los valores de *k* en estudio.

Como podemos ver en la ecuación (1), la distribución Lagrangian Poisson tiene solamente dos parámetros desconocidos simbolizados por las letras minúsculas g_1 (tasa de atracción) y g_2 (tasa de competición). Si se conociesen estos dos parámetros se podría calcular la probabilidad de toda la distribución de frecuencias.

Aplicación a la productividad de los autores

Vamos a proporcionar un ejemplo de aplicación de la Ley de Lotka usando el modelo Lagrangian Poisson. Los datos proceden de un estudio realizado por Targino & Caldeira (1988). Estos autores analizaron la productividad científica de los docentes de la Universidad Federal de Piauí, en el Brasil, relativa a los años 1984 y 1985. Aunque los datos estudiados por estos autores cubren solamente un periodo de dos años y no proceden de una área específica sino de diferentes áreas de la enseñanza universitaria, lo cual viola las recomendaciones para una correcta aplicación de la ley de Lotka, vamos a analizarlos vía la distribución Lagrangian Poisson. La razón fundamental es que no existen datos recolectados que incluyan autores con cero producciones y transformen los datos de Targino & Caldeira (1988) en un laboratorio ideal para experimentar la distribución Lagrangian Poisson. Otra razón es que el eje central de este trabajo es la didáctica de la aplicación de este modelo.

Entre los años de 1984-85, la Universidad Federal de Piauí tenía un total de 958 docentes, pero solamente 95 de ellos mostraron producción científica en la forma de libros, capítulos de libros, artículos de revistas, reportes de investigación y comunicaciones en congresos. Eso significa que 863 profesores no produjeron ni un solo artículo. Aunque en sus análisis de la ley de Lotka, los autores no incluyeron a los docentes que no produjeron ningún trabajo en el periodo estudiado, en este trabajo vamos a incluirlos y analizarlos a través de la distribución Lagrangian Poisson. Aplicaremos el modelo paso a paso.

1. Recolección de los datos y distribución de las frecuencias observadas

La distribución de autores y artículos recolectados para este estudio se muestran en la *Tabla 1*. En los 2 años estudiados, el 90% de los profesores no mostró productividad alguna y ésta sólo fue realizada por el 10% de los docentes. Más aún, la tabla muestra que solamente el 1% de los profesores publicaron 5 o más trabajos. Los otros datos indican que la media de productividad fue bastante baja y alcanzó apenas 0.2432 trabajos por docente, con una varianza de 1.2 trabajos y una desviación estándar de 1.1 trabajos por profesor.

Tabla 1
Distribución de la frecuencia observada de los artículos producidos por los profesores

Núm. de contribuciones por autor *x*	Núm de autores *y*	% de autores *y*	Núm. de artículos *x.y*	% de artículos *x.y*
0	863	90.08	0	0.00
1	44	4.59	44	18.88
2	23	2.40	46	19.74
3	10	1.04	30	12.88
4	9	0.94	36	15.45
5	2	0.21	10	4.29
6	2	0.21	12	5.15
7	2	0.21	14	6.01
13	2	0.21	26	11.16
15	1	0.10	15	6.44
Total	**958**	**100.0**	**233**	**100.0**

Si observamos que un total de 233 artículos fueron aleatoriamente producidos por 958 profesores ¿cuantos profesores se esperaría que no produjeran ningún artículo? ¿cuántos solamente 1 artículo? y ¿cuantos producirían 2, 3, 4,..., 15 artículos cada uno? El modelo Lagrangian Poisson debe responder lo más exactamente posible a estas interrogantes.

2. Cálculo de la media aritmética

Para calcular la media aritmética, los datos recolectados fueron organizados conforme se muestran en la tabla siguiente. Después, se multiplicó el número de contribuciones por autor (x) y por el número de autores (y) para obtenerse el número total de artículos publicados. Finalmente, se calculó la suma acumulada tanto de autores como de artículos conforme se muestra en la *Tabla 2* .

Tabla 2 **Distribución de la frecuencia observada de los artículos producidos por los profesores**		
Núm. De contribuciones por autor *x*	**Núm. de autores *y***	**Núm. de artículos *x.y***
0	863	0
1	44	44
2	23	46
3	10	30
4	9	36
5	2	10
6	2	12
7	2	14
13	2	26
15	1	15
Total	**958**	**233**

$$\tilde{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} xy}{n} = \frac{233}{958} = 0.2432$$

3. Calcular la varianza

Para calcular la varianza, se le adicionaron dos nuevas columnas a los datos presentados en la *Tabla 2*. En la cuarta columna de esta nueva tabla se incluyeron los valores del número de contribuciones por autor (x) elevados al cuadrado (x^2**), y e**n la quinta aparecen los valores del número de autores (y) de la segunda columna multiplicados por los valores de la cuarta columna, es decir, x^2y. Finalmente, se calculó la suma acumulada de la segunda, tercera y quinta columnas conforme se muestra en la *Tabla 3*. Después, se calculó la varianza usando la siguiente fórmula:

$$\mathrm{var} = \frac{\sum x^2 y \; - \; \frac{\left(\sum xy\right)^2}{N}}{N - 1}$$

Tabla 3 Distribución de la frecuencia observada de los artículos producidos por los profesores				
x	***y***	***xy***	***x*²**	***x*²*y***
0	863	0	0	0
1	44	44	1	44
2	23	46	4	92
3	10	30	9	90
4	9	36	16	144
5	2	10	25	50
6	2	12	36	72
7	2	14	49	98
13	2	26	169	338
15	1	15	225	225
Total	**958**	**233**		**1153**

$$\mathrm{var} = \frac{1153 \; - \; \frac{(233)^2}{958}}{958 - 1} \; = \; \frac{1153 - \frac{54289}{958}}{957} \; = \; \frac{1153 - 56.6691023}{957}$$

$$\mathrm{var} = \frac{1096.330898}{957} = 1.145591325 \; \pm \; 1.1456$$

4. Calcular la desviación estándar

$$DS = \sqrt{\mathrm{var}} \; = \; \sqrt{1.1456} \; = \; 1.070327053 \; \pm \; 1.0703$$

5. Calcular el índice de dispersión

$$ID = \frac{\text{var}}{\tilde{x}} = \frac{1.1456}{0.2432} = 4.71053$$

6. Calcular g_2 (efecto de la dispersión)

$$g_2 = 1 - \hat{D}^{-0.5}$$

donde,
D es el índice de dispersión

$$g_2 = 1 - (4.71053)^{-0.5} = 1 - 0.46075 = 0.53925$$

7. Calcular g_1 (tasa de atracción)

$$g_1 = \tilde{x}\ (1 - \hat{g}_2)$$

$$g_1 = 0.2432\ (1 - 0.53925) = 0.2432 \times 0.46075 = 0.112054$$

8. Calcular b (tasa de competición)

$$b = \frac{g_1}{g_2}$$

$$b = \frac{0.112054}{0.53925} = 0.207796$$

9. Calcular los valores esperados o teóricos

Con los valores de g_1 y g_2 ya conocidos, calcular los valores esperados o teóricos, usando la ecuación (1) siguiente:

$$N_k = N\left[\frac{g_1\left(g_1 + g_2 k\right)^{k-1} e^{-\left(g_1 + g_2 k\right)}}{k!}\right] \qquad (1)$$

Esta ecuación es apenas una multiplicación de N por el valor de la ecuación que está entre corchetes. Así que en este caso primero vamos a solucionar la ecuación que está entre corchetes para después multiplicar el valor calculado por el valor de N. En este caso $N = 958$ docentes productores de artículos.

a) Ejemplo de cálculo de $k = 0$ (número de autores esperados o teóricos que no produjeron ningún artículo)

$$N_0 = \frac{0.112054\,(0.112054 + (0.53925)(0))^{0-1}\, 2.718^{-(0.112054 + (0.53925)(0))}}{0!}$$

$$N_0 = \frac{0.112054\,(0.112054\,)^{-1}\, 2.718^{-0.112054}}{1}$$

$$N_0 = \frac{0.112054 \times 8.92427 \times 0.894006}{1}$$

$$N_0 = \frac{0.894006}{1} = 0.894006$$

$$N_0 = 0.894006 \times 958 = 856.458$$

$N_0 = 856.5$ redondeando

b) Ejemplo de cálculo de $k = 1$ (número de autores esperados o teóricos que produjeron 1 artículo)

$$N_1 = \frac{0.112054\,(0.112054 + (0.53925)(1))^{1-1} \times 2.718^{-(0.112054 + (0.53925)(1))}}{1!}$$

$$N_1 = \frac{0.112054\,(0.651304\,)^{0} \times 2.718^{-0.651304}}{1}$$

$$N_1 = \frac{0.112054 \times 1 \times 0.521401}{1}$$

$$N_1 = \frac{0.0584251}{1} = 0.0584251$$

$$N_1 = 0.0584251 \times 958 = 55.9712$$

$N_1 = 56.0$ redondeando

c) Ejemplo de cálculo de $k = 2$ (número de autores esperados o teóricos que produjeron 2 artículos)

$$N_2 = \frac{0.112054\ (0.112054 + (0.53925)\,(2))^{2-1}\ 2.718^{-\,(0.112054\,+\,(0.53925)\,(2))}}{2!}$$

$$N_2 = \frac{0.112054\ (0.112054 + 1.0785\ )^{1}\ 2.718^{-\,(0.112054\,+\,1.0785)}}{2}$$

$$N_2 = \frac{0.112054\ (1.190554\ )^{1}\ 2.718^{-\,1.190554}}{2}$$

$$N_2 = \frac{0.112054 \times 1.190554 \times\ 0.30409}{2}$$

$$N_2 = \frac{0.0405675}{2} = 0.0202838$$

$$N_2 = 0.0202838 \times 958 = 19.4319$$

$N_2 = 19.4$ redondeando

d) y así sucesivamente para k = 3, 4, 5, ... n, es decir, para todos los valores esperados o teóricos de autores que produjeron 3, 4, 5, … n artículos, incluyendo las frecuencias del número de artículos para los cuales no se observaron autores productores pero que están implícitamente incluidos en la muestra analizada. Este es el caso de las frecuencias de 8, 9, 10, 11, 12, y 14 artículos para los cuales, en los datos de Targino & Caldeira (1988), no se observaron docentes productores. El objetivo de ésta medida es no tener ninguna frecuencia vacía que pueda afectar el cálculo de la prueba del x^2 (chi-cuadrado).

10. Establecer las hipótesis y seleccionar un nivel de significancia (se recomienda α = .05)

Lo que se desea probar es si los valores de k = 1, 2, 3, ... n proceden de una distribución del tipo de Lagrangian Poisson; es decir, la probabilidad de que un elemento incluido en la muestra sea igualmente probable para todos los elementos en esa misma situación. Por lo tanto, se establecen las hipótesis de la siguiente manera:

H_0 = la distribución representa los conteos de k = 0, 1, 2, 3 ..... n artículos.
H_a ≠ la distribución no representa los conteos de k = 0, 1, 2, 3 ..... n artículos.

11. Calcular la prueba estadística del χ^2 (chi-cuadrado), usando la siguiente ecuación:

$$\chi^2 = \sum_{1}^{n} \frac{(f_o - f_t)^2}{f_t}$$

donde,

f_o = Frecuencia observada

f_t = Frecuencia teórica, esperada o calculada.

Para facilitar el cálculo del chi-cuadrado, se elaboró la *Tabla 4*. Sin embargo, es necesario llamar la atención hacia el hecho de que, en la aplicación de la prueba del χ^2 (chi-cuadrado), ninguna de las frecuencias observadas debe ser menor a 5. Si se encontrasen frecuencias inferiores a 5, será necesario agrupar dos, tres o más frecuencias adyacentes en grupos iguales o mayores a 5 pero nunca menores a 5. De esa forma la prueba del χ^2 (chi-cuadrado), no perderá validez ni consistencia.

Tabla 4
Cálculo del chi-cuadrado sin agrupación de frecuencias menores a 5

x	fo	ft	(fo – ft)	(fo – ft)²	$\frac{(f_o - f_t)^2}{f_t}$
0	863	856.5	6.50	42.25	0.0493
1	44	56.0	-12.00	144.00	2.5714
2	23	19.4	3.60	12.96	0.6680
3	10	9.4	0.60	0.36	0.0383
4	9	5.4	3.60	12.96	2.4000
5	2	3.4	-1.40	1.96	0.5765
6	2	2.2	-0.20	0.04	0.0182
7	2	1.5	0.50	0.25	0.1667
8	0	1.1	-1.10	1.21	1.1000
9	0	0.8	-0.80	0.64	0.8000
10	0	0.6	-0.60	0.36	0.6000
11	0	0.4	-0.40	0.16	0.4000
12	0	0.3	-0.30	0.09	0.3000
13	2	0.2	1.80	3.24	16.2000
14	0	0.2	-0.20	0.04	0.2000
15	1	0.1	0.90	0.81	8.1000
Total	**958**	**957.5**			**χ^2 = 34.1884**

Como ejemplo para mostrar las variaciones que se encuentran en situaciones prácticas vamos a incluir dos tablas dado que la *Tabla 5* es la forma más adecuada y recomendable para calcular el valor del x^2 (chi-cuadrado). En la *Tabla 4* anterior, las frecuencias inferiores a 5 no fueron agrupadas y el valor del x^2 (chi-cuadrado) calculado es igual a 34.1884. Mientras que en la Tabla 5, con las frecuencias observadas adyacentes inferiores a 5 agrupadas (casos 5 a 15), el x^2 (chi-cuadrado) calculado es de 6.027, mucho menor al mostrado en la tabla anterior sin agrupación de frecuencias menores a 5.

Tabla 5
Cálculo del chi-cuadrado con agrupación de frecuencias menores a 5

x	fo	ft	$(fo - ft)$	$(fo - ft)^2$	$\frac{(f_o - f_t)^2}{f_t}$
0	863	856.5	6.50	42.25	0.0493
1	44	56.0	-12.00	144.00	2.5714
2	23	19.4	3.60	12.96	0.6680
3	10	9.4	0.60	0.36	0.0383
4	9	5.4	3.60	12.96	2.4000
5-15	9	10.8	-1.80	3.24	0.3000
Total	**958**	**957.5**			x^2 **= 6.027**

¿Es este valor del x^2 = 6.027 lo suficientemente alto como para concluir que los valores de la distribución sobre la producción de trabajos de los profesores de la Universidad Federal de Piauí son igualmente probables para todos los profesores de esa universidad; es decir, proceden de una distribución del tipo Lagrangian Poisson?

12. Especificar la región de rechazo de las hipótesis al nivel de significancia de $\alpha = .05$

a) Determinación de los grados de libertad:

$df = k - 1 - n = 6 - 1 - 2 = 3$

donde,

k = es el número de pares de datos observados y usados para calcular el chi-cuadrado. Estos pares de datos pueden ser vistos en la *Tabla 5* elaborada para calcular el chi-cuadrado agrupando frecuencias menores a 5. En este caso k es igual a 6.

1 = es el número de restricciones usadas para los cálculos de los valores esperados. En este caso es 1.

n = es el número de parámetros usados en la solución de la ecuación (1). En este caso son 2, g_1 (tasa de atracción) y g_2 (tasa de competición).

b) Usando el nivel de significancia de $\alpha = .05$ en la Tabla del x^2 de cualquier texto estadístico (en este trabajo incluido como *Anexo 1*), encontrar la región de rechazo.

Si el $x^2 > x^2_{.05}$ rechazar la hipótesis nula (aceptar la Ha)
Si el $x^2 < x^2_{.05}$ aceptar la hipótesis nula (rechazar la Ha)

En otras palabras, si el x^2 calculado es mayor que el valor crítico de $\alpha = .05$ rechazar la hipótesis nula. Eso significa aceptar la hipótesis alternativa. Y si el x^2 calculado es menor que el valor crítico de $\alpha = .05$ aceptar la hipótesis nula. Eso significa rechazar la hipótesis alternativa.

c) Usando la *Tabla 1* (incluida como anexo), de los valores críticos del $x^2_{.05}$ corresponden te a 3 grados de libertad, se encontró un valor igual a 7.81473, por lo tanto la región de rechazo es la parte situada a la derecha de la línea punteada y sombreada de la *Figura 1*. La región de aceptación es la parte que queda a la izquierda de esa figura.

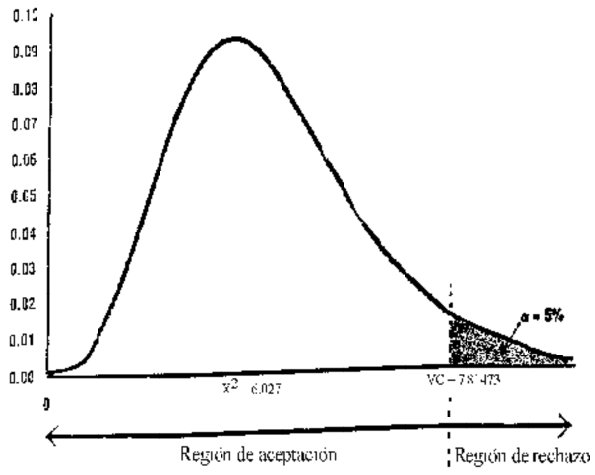


Figura 1:
Región de aceptación y rechazo de las hipótesis

13. Interpretación

Como el x^2 calculado de 6.027 es menor que el valor crítico del $x^2_{.05}$ de 7.81473, aceptamos la hipótesis nula (no la rechazamos) al 0.05 nivel de significancia. Por lo tanto, concluimos que los valores de las frecuencias proceden de una distribución del tipo de Lagrangian Poisson y son igualmente probables para todos los valores de *k*.

14. Comparación de los valores observados y los valores calculados

Elaborar una tabla especial para comparar los valores observados y calculados. Observar en esta tabla cuán próximos o alejados están ambos valores. Observar también que los totales son los mismos, casi los mismos o divergentes. Los valores esperados o calculados son aquellos que se muestran en la tercera columna de la *Tabla 6* siguiente. En este caso, las mayores divergencias se presentan en la segunda y tercera frecuencias. En la segunda frecuencia, se observaron 44 autores productores de un único trabajo, pero el modelo estimó como siendo igual a 56 docentes. Esto representa una sobrestimación de 12 autores (27%). En la tercera frecuencia se observaron 23 docentes pero el modelo los estimó como siendo igual a 19 profesores: una subestimación de 4 autores (17%). Sin embargo, estas diferencias son mínimas frente al tamaño de la muestra de 958 docentes estudiados.

Tabla 6:
Comparación de los valores observados y calculados

Número de contribuciones por autor *x*	**Frecuencias observadas**	**Frecuencias esperadas**
0	863	856.5
1	44	56.0
2	23	19.4
3	10	9.4
4	9	5.4
5	2	3.4
6	2	2.2
7	2	1.5
8	0	1.1
9	0	0.8
10	0	0.6
11	0	0.4
12	0	0.3
13	2	0.2
14	0	0.2
15	1	0.1
Total	**958**	**957.5**

15. Trazar el gráfico de dispersión de los valores observados y esperados

Como se muestra en la siguiente *Figura2*, la aproximación entre los valores observados y esperados de la distribución de la productividad de los autores puede ser mejor visualizada en el trazado de la dispersión de ambos valores. Esta figura deberá ser incluida en la redacción del informe final.

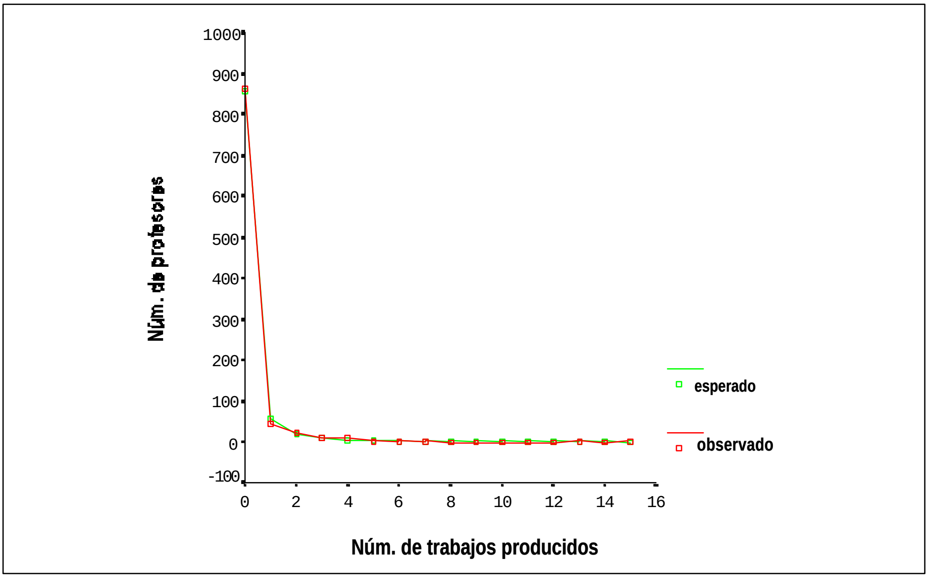


Figura2:
Gráfico de dispersión de las frecuencias observadas y esperadas

CONCLUSIONES

El estudio sobre la productividad de los docentes de la Universidad Federal de Piauí en el Brasil, permitió identificar un alto porcentaje (90% de los profesores) que en el periodo estudiado no mostró producción intelectual en la forma de libros, folletos, capítulos de libros, artículos de revistas, informes de investigación y comunicaciones en congresos. También se identificó un 8% de pequeños productores responsables del 52% de la literatura producida. Por su parte los medianos y grandes productores que representaron solamente el 2% de los docentes fueron responsables por casi la mitad de la literatura producida (48%).

Se encontró también que el 1% de los profesores publicó 5 ó más trabajos, lo que representó un tercio de la producción total (33%). La media de productividad fue bastante baja y apenas alcanzó 0.2432 trabajos por docente, con una varianza de 1.2

trabajos, una desviación estándar de 1.1 trabajos por profesor y un índice de dispersión de 4.71053, lo que indica una relativa falta de comunicación y colaboración entre los profesores incluidos en la muestra estudiada.

La prueba del x^2 (chi-cuadrado) fue usada para evaluar el ajuste de los datos observados a los datos esperados. Con una tasa de dispersión $g_2 = 0.53925$ y una tasa de atracción $g_1 = 0.112054$, al 0.05 nivel de significancia con 3 grados de libertad, se verificó que el valor crítico del x^2 fue igual a 7.81473, mucho mayor que el valor del x^2 calculado de 6.027. Por lo tanto se concluye que esta literatura se ajusta muy bien al modelo de Lotka usando la distribución Lagrangian Poisson.

Tal vez sea pertinente mencionar que Targino & Caldeira (1988) no estimaron los parámetros de su modelo estadístico ni probaron sus datos y sólo parecen sugerir que sus datos truncados se ajustan al modelo de la distribución del cuadrado inverso conforme a lo propuesto por Lotka (1926).

BIBLIOGRAFÍA

Budd, John M. A bibliometric analysis of higher education literature. *Research in Higher Education*, 28(2):180-190, 1988.

Carpintero, Helio; Peiró, José María & Quintanilla, Ismael. El “Anuario de Psicología” (1969-1974): un estudio estadístico y bibliométrico. *Anuario de Psicología*, 16(1):22-34, 1977.

Chung, Kee H.; Pak, Hong S. & Cox, Raymond A. K. “Patterns of research output in the accounting literature: a study of the bibliometric distributions”. *Abacus*, 28(2):168-185, 1992.

Chung, Kee H. & Cox, Raymond A. K. “Patterns of productivity in the finance literature: a study of bibliometric distributions”. *The Journal of Finance*, 45(1):301-309, March 1990.

Coile, Russell C. “Lotka and Information science”. *Journal of the American Society for Information Science*, 26(2):133, March-April 1975.

Cole, LaMont C. “A theory for analyzing contagiously distributed populations”. *Ecology*, 27(4):329-341, October 1946.

Consul, P. C. & Jain, G. C. “A generalization of the Poisson distribution”. *Technometrics*, 15(4):791-799, Nov. 1973.

Cook, Kevin L. “Laws of scattering applied to popular music”. *Journal of the American Society for Information Science*, 40(4):277-283, July 1989.

Cox, Raymond A. K. & Chung, Kee H. “Patterns of research output and author concentration in the economic literature”. *The Review of Economics and Statistics*, 73(4):740-747, Nov. 1991.

Cox, Raymand A. K.; Felton, James M. & Chung, Kee H. "The concentration of commercial success in popular music: an analysis of the distribution of gold records". *Journal of Cultural Economics*, 19(4):333-340, 1995.

Gisbert Tio, Amparo & Valderrama Zurian, Juan Carlos. "Estudio bibliométrico de la revista Española de Drogodependencias", 1976-1993. En: *Actas de las 5as. Jornadas de Información y Documentación de Ciencias de la Salud*, Palma de Mallorca, 4, 5 y 6 de Mayo de 1994. pp. 1-7.

Gupta, D. K. "Lotka's law and productivity patterns of entomological research in Nigeria for the period", 1900- 1973. *Scientometrics*, 12(1/2):33-46, 1987.

Gupta, B. M.; Kumar, Suresh; Syed, Shaheen & Singh, Karanvir. "Distribution of productivity among authors in potato research (1900-1980)". *Library Science with Slant to Documentation*, 33(3):127-134, Sept. 1996.

Gupta, B. M. & Karisiddappa, C. R. "Author porductivity patterns in theoretical populations genetics, 1900-1980". *Scientometrics*, 36(1):19-41, 1996.

Gupta, B. M.; Kumar, Suresh & Rousseau, Ronald. "Applicability of selectedprobability distributions to the number of authors per articlein theoretical population genetics". *Scientometrics*, 42(3):325-334, 1998.

Janardan, Konanur G. & Schaeffer, David J. "Models for the analysis of chromosomal aberrations in human leukocytes". *Biometrical Journal*, 19(8):599-612, 1977.

Janardan, Konanur G.; Kester, Harold W. & Schaeffer, David J. "Biological applications of the Lagrangian Poisson distribution". *BioScience*, 29(10):599-602, October 1979.

Jiménez Contreras, Evaristo & Moya De Anegón, Félix. "Análisis de la autoría en revistas españolas de Biblioteconomía y Documentación, 1975-1995". *Revista Española de Documentación Científica*, 20(3):252-266, 1997.

López Calafi, J.; Salvador, A. & Guardia, M. de la. "Estudio bibliométrico de la literatura científica sobre la determinación de elementos metálicos en aceites lubricantes por espectroscopia de absorción atómica". *Revista Española de Documentación Científica*, 8(3):201-213, 1985.

López-Muñoz, Francisco; Boya, Jesus; Marín, Fernando & Calvo, José Luis. "Scientific research on the pineal gland and melatonin: a bibliometric study for the period 1966-1994". *Journal of Pineal Research*, 20(3):115-124, 1996.

López-Muñóz, F. & Rubio Valladolid, G. "La producción científica española en psiquiatría: estudio bibliométrico de las publicaciones de circulación internacional durante el periodo 1980-1993". *Anales de Psiquiatría*, 2(2):68-75, 1995.

Lotka, Alfred J. "The frequency distribution of scientific productivity". *Journal of the Washington Academy of Sciences*, 16(12):317-323, June, 1926.

Murphy, Larry J. "Lotka's law in the Humanities?" *Journal of the American Society for Information Science*, 24(6):461-462, Nov.-Dec. 1973.

Naranan, S. "Power law relations in science bibliography: a self consistent interpretation". *Journal of Documentation*, 27(2):83-97, June 1971.

Nath, Ravinder & Wade M. Jackson. "Productivity of managment information systems researchers: does Lotka's Law apply?" *Information Processing & Management*, 27 (2/3): 203-209, 1991.

Nicholls, Paul Travis. "Empirical validation of Lotka's Law". *Information Processing & Management*, 22 (5): 417-419 (1986).

Nicholls, Paul Travis. "Estimation of Zipf parameters". *Journal of the American Society for Information Science*, 38:443-445, 1987.

Nicholls, Paul Travis. "Bibliometric modeling process and the empirical validity of Lotka's Law". *Journal of the American Society for Information Science*, 40(6):379-385, 1989.

Oppenheim, Charles. "Use of online databases in bibliometric studies". In: *International On-Line Information Meeting* (9th : 1985 : London, England). 9th International Online Information Meeting, London, 3-5 December 1985 / organized by Learned Information (Europe) Ltd. Oxford, England ; Medford, N.J. : Learned Information, [1986?] pp. 355-364.

Pao, Miranda Lee. "Bibliometrics and computational musicology". *Collection Management* 3(1): 79-109, 1979.

Pao, Miranda Lee. "Lotka's law: a testing procedure". *Information Processing & Management*, 21(4):305-320, 1985.

Pao, Miranda Lee. "An empirical examination of Lotka's Law". *Journal of the American Society for Information Science*, 37(1):26-33, 1986.

Potter, W. G. "Lotka's Law revisited". *Library Trends*, 31:21-39, 1981.

Sánchez, Hernández, Antonio; Pedraja, María J.; Quiñonez-Vidal, Elena & Martínez-Sánchez, Francisco. "A historic-quantitative approach to psychophysiological research: the first three decades of the journal Psychophysiology (1964-1993)". *Psychophysiology*, 33(6):629-636, 1996.

Targino, Maria das Graças & Caldeira, Paulo da Terra. "Análise da produção científica em uma instituição de ensino superior: o caso da Universidade Federal do Piauí". *Ciência da Informação*, Brasilia, 17(1):15-25, Jan.-Jun. 1988.

Terrada, María-Luz. "La productividad de los autores médicos españoles (Ley de Lotka)". *La literatura médica española contemporánea: estudio estadístico y sociométrico*. Valencia, España: Cento de Documentación e Informática Médica, 1973. pp. 85-92.

Terrada, María-Luz & Navarro Víctor. "La productividad de los autores españoles de bibliografía médica". *Revista Española de Documentación Científica*, 1(1):9-19, 1977.

Turkeli, Arif. "The doctoral training environment and post-doctorate productivity among Turkish physicists". *Science studies*, 3 (3): 311-318, 1973.

Turkeli, Arif. "Doctoral training environments and post-doctorate productivity of Turkish physicists". *Hacettepe Bulletin of Social Sciences and Humanities*, 5 (1): 91-100, 1973.

Urbizagástegui Alvarado, Rubén. "La ley de Lotka y la literatura de Bibliometría". *Investigación Bibliotecológica, México*, 13(27):125-141, Julio-Diciembre 1999.

Urbizagástegui Alvarado, Rubén & Oliveira, Marlene de. "A produtividade dos autores na antropologia brasileira". *DataGramaZero*, 2(6):1-17, Dezembro 2001.

Urbizagástegui Alvarado, Rubén & LANE, Shelley. *Lotka's Law : a bibliography*. Riverside, 2002.

Urbizagástegui Alvarado, Rubén. "A lei de Lotka na bibliometria brasileira". *Ciencia da Informação*, Brasilia, 31(2):14-20, Maio-Ago. 2002.

Urbizagástegui Alvarado, Rubén & Cortés, María Teresa. "La productividad de autores en la Revista Geológica de Chile". *Ciencia de la Información*, Cuba, 2002. No prelo.

Urbizagástegui Alvarado, Rubén. Lotka's law on Lotka's literature: an exploration. 2002. No prelo.

Vlachý, Jan. "On publication characteristics of research establishments". *Czechoslovak Journal of Physics*, B20: 1149-1155, 1970.

Vlachý, Jan. "Distribution patterns in creative communities". *In: World Congress Of Sociology, 8, Toronto , 19 a 24 de August de 1974.*

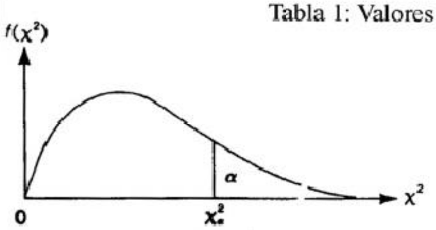
Vlachý, Jan. "Time factor in Lotka's law". *Probleme de Informare si Documentare*, 10(2):44-87, Mar.-Apr. 1976

Vlachý, Jan. "Evaluating the distribution of individual performance". *Scientia Yugoslavica*, 6(1-4):267-275, 1980.

Voos, Henry. "Lotka and Information Science". *Journal of the American Society for Information Science*, 25(4):270-272, July-August 1974.

ANEXO 1

Tabla 1: Valores críticos del x^2



DEGREES OF FREEDOM	$\chi^2_{.995}$	$\chi^2_{.990}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.950}$	$\chi^2_{.900}$
1	0.0000393	0.0001571	0.0009821	0.0039321	0.0157908
2	0.0100251	0.0201007	0.0506356	0.102587	0.210720
3	0.0717212	0.114832	0.215795	0.351846	0.584375
4	0.206990	0.297110	0.484419	0.710721	1.063623
5	0.411740	0.554300	0.831211	1.145476	1.61031
6	0.675727	0.872085	1.237347	1.63539	2.20413
7	0.989265	1.239043	1.68987	2.16735	2.83311
8	1.344419	1.646482	2.17973	2.73264	3.48954
9	1.734926	2.087912	2.70039	3.32511	4.16816
10	2.15585	2.55821	3.24697	3.94030	4.86518
11	2.60321	3.05347	3.81575	4.57481	5.57779
12	3.07382	3.57056	4.40379	5.22603	6.30380
13	3.56503	4.10691	5.00874	5.89186	7.04150
14	4.07468	4.66043	5.62872	6.57063	7.78953
15	4.60094	5.22935	6.26214	7.26094	8.54675
16	5.14224	5.81221	6.90766	7.96164	9.31223
17	5.69724	6.40776	7.56418	8.67176	10.0852
18	6.26481	7.01491	8.23075	9.39046	10.8649
19	6.84398	7.63273	8.90655	10.1170	11.6509
20	7.43386	8.26040	9.59083	10.8508	12.4426
21	8.03366	8.89720	10.28293	11.5913	13.2396
22	8.64272	9.54249	10.9823	12.3380	14.0415
23	9.26042	10.19567	11.6885	13.0905	14.8479
24	9.88623	10.8564	12.4011	13.8484	15.6587
25	10.5197	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734
26	11.1603	12.1981	13.8439	15.3791	17.2919
27	11.8076	12.8786	14.5733	16.1513	18.1138
28	12.4613	13.5648	15.3079	16.9279	18.9392
29	13.1211	14.2565	16.0471	17.7083	19.7677
30	13.7867	14.9535	16.7908	18.4926	20.5992
40	20.7065	22.1643	24.4331	26.5093	29.0505
50	27.9907	29.7067	32.3574	34.7642	37.6886
60	35.5346	37.4848	40.4817	43.1879	46.4589
70	43.2752	45.4418	48.7576	51.7393	55.3290
80	51.1720	53.5400	57.1532	60.3915	64.2778
90	59.1963	61.7541	65.6466	69.1260	73.2912
100	67.3276	70.0648	74.2219	77.9295	82.3581

DEGREES OF FREEDOM	$\chi^2_{.100}$	$\chi^2_{.050}$	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.010}$	$\chi^2_{.005}$
	2.70554	3.84146	5.02389	6.63490	7.87944
2	4.60517	5.99147	7.37776	9.21034	10.5966
3	6.25139	7.81473	9.34840	11.3449	12.8381
4	7.77944	9.48773	11.1433	13.2767	14.8602
5	9.23635	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496
6	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119	18.5476
	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777
8	13.3616	15.5073	17.5346	20.0902	21.9550
9	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660	23.5893
10	15.9871	18.3070	20.4831	23.2093	25.1882
11	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250	26.7569
12	18.5494	21.0261	23.3367	26.2170	28.2995
13	19.8119	22.3621	24.7356	27.6883	29.8194
14	21.0642	23.6848	26.1190	29.1413	31.3193
15	22.3072	24.9958	27.4884	30.5779	32.8013
16	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999	34.2672
17	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087	35.7185
18	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053	37.1564
19	27.2036	30.1435	32.8523	36.1908	38.5822
20	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662	39.9968
21	29.6151	32.6705	35.4789	38.9321	41.4010
22	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894	42.7956
23	32.0069	35.1725	38.0757	41.6384	44.1813
24	33.1963	36.4151	39.3641	42.9798	45.5585
25	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141	46.9278
26	35.5631	38.8852	41.9232	45.6417	48.2899
27	36.7412	40.1133	43.1944	46.9630	49.6449
28	37.9159	41.3372	44.4607	48.2782	50.9933
29	39.0875	42.5569	45.7222	49.5879	52.3356
30	40.2560	43.7729	46.9792	50.8922	53.6720
40	51.8050	55.7585	59.3417	63.6907	66.7659
50	63.1671	67.5048	71.4202	76.1539	79.4900
60	74.3970	79.0819	83.2976	88.3794	91.9517
70	85.5271	90.5312	95.0231	100.425	104.215
80	96.5782	101.879	106.629	112.329	116.321
90	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299
100	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169