

MODELOS MATEMATICOS MORSE-MARKOV SU APLICACION EN BIBLIOTECAS

Heshmatallah Khorramzadeh

$$N(j,0) = N(j) / [e^{-j} - 1]$$

$$N(j,0)$$

$$N(m) = \alpha + \beta m$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \quad \sum N(j)$$

$$\sum N(j) = Na$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$b = \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x^2 - n\bar{x}^2}$$

$$N(j,0) = N(j) / [e^{-j} - 1]$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$\sum N(j) = Na$$

QA274.7
K53

MEMORIA DEL TERCER ENCUENTRO DE BIBLIOTECARIOS DE LA UNAM

BIBLIOTECAS Y ARCHIVOS

12

BOLETÍN DE INVESTIGACIONES BIBLIOGRÁFICAS

Ep. 3, No. 12, 1973

Anuario de Bibliotecología, Archivología e Informática

ANUARIO DE BIBLIOTECOLOGIA
ARCHIVOLOGIA E INFORMATICA

IX JORNADAS MEXICANAS DE BIBLIOTECONOMIA 1978

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

DR. JORGE CARPIZO

Rector

DR. JOSE NARRO ROBLES

Secretario General

DR. ABELARDO VILLEGAS MALDONADO

Secretario General Académico

C.P. JOSE ROMO DIAZ

Secretario General Administrativo

LIC. MARIO RUIZ MASSIEU

Secretario General Auxiliar

LIC. MANUEL BARQUIN ALVAREZ

Abogado General

DR. HUMBERTO MUÑOZ GARCIA

Coordinador de Humanidades

MTRA. ESTELA M. MORALES CAMPOS

Directora del CUIB

LIC. ELSA M. RAMIREZ LEYVA

Secretaria Académica del CUIB

MODELOS MATEMATICOS MORSE-MARKOV

**Su aplicación en bibliotecas: Evaluación de uso de obras
monográficas**

CENTRO UNIVERSITARIO DE INVESTIGACIONES BIBLIOTECOLOGICAS

MONOGRAFIAS 4

MODELOS MATEMATICOS MORSE-MARKOV

Su aplicación en bibliotecas: Evaluación de uso de obras monográficas

Heshmatallah Khorramzadeh



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

MEXICO 1988

QA274

.7

K45

Khorramzadeh, Heshmatallah

Modelos matemáticos Morse-Markov
Su aplicación en bibliotecas: Evaluación
de uso de obras monográficas / Heshmatallah
Khorramzadeh. -- México : UNAM, Centro Uni
versitario de Investigaciones Bibliotecológicas,
1988.

xvi, 124 p. : il. -- (Monografías 4)
ISBN: 968-36-0336-X.

1. Modelos matemáticos - Bibliotecas.
2. Estadística matemática. 3. Proceso de Markov - Bibliotecas. I.t.

Primera Edición: 1988

DR © Universidad Nacional Autónoma de México
Ciudad Universitaria. 04510 México, D.F.

Impreso y hecho en México

ISBN: 968-36-0336-X

CONTENIDO

PREFACIO	ix
INTRODUCCION	xiii
MODELOS TEORICOS DE MORSE	
Supuestos Básicos	1
Cálculo de los Parámetros de α y β	5
Probabilidad Transicional	10
Distribución Geométrica de la Circulación en el Primer Año	13
Libros Activos e Inactivos.	16
Extensión de Modelos Teóricos de Morse.	21
Distribución de la Circulación en el Período de Muestra	
Factor de Corrección.	22
Cálculo de ρ	24
Libros Desconocidos	26
Libros Potenciales.	27
Distribución Geométrica	29
Cálculos de N_a , N_p , N_M y C	32
Cálculos de R_a , $N(>j)$, $F(>j)$ y γ	32
Comparación de los Valores Experimental y Teórico	37
Estimación de la Circulación Anual.	38
Predicción de la Circulación Anual en los Próximos Años	44
CONCLUSIONES.	51
APENDICE I	61
1 Notas Explicatorias sobre el Registro de la Circulación.	63
2 Notas Explicatorias sobre la Construcción de la tabla	
1 Utilizando los Datos de la Clase 900-999.	63

3	Tabla X la Historia de la Circulación de la Clase 900-999.	73
	APENDICE II	75
1	Notas Explicatorias sobre α y β	77
2	Tabla XI Comparación de α y β de ocho Clases de la Biblioteca del ITAM.	80
	APENDICE III.	81
1	Notas Explicatorias.	83
2	Tabla XII, Matriz de Probabilidad Transicional de la clase 300-399, $t=1$	88
3	Tabla XIII, Matriz de Probabilidad Transicional de la Clase 300-399, $t=2$	89
4	Tabla XIV, Matriz de Probabilidad Transicional de la Clase 300-399, $t=4$	90
5	Tabla XV, Matriz de Probabilidad Transicional de la Clase 300-399, $t=8$	91
	APENDICE IV	93
1	Desarrollo Matemático de la Fórmula (36)	95
	APENDICE V	101
1	Gráfica II Circulación de la Colección en el Período 1980-1984.	103
2	Tabla XVI Datos de la Circulación y Valores de Rho	104
3	Tabla XVII Cálculos de $1/1-(1-\rho)^j$ y $1/(1-e^{-j})$ para los Valores de $\rho=1/9, 1/10, 1/11$ y $1/13$	105
4	Tabla XVIII Cálculos de $1/1-(1-\rho)^j$ y $1/(1-e^{-j})$ para los Valores de $\rho=1/16, 1/23, 1/24$ y $1/25$	106

APENDICE VI	107
1 Notas Explicatorias Sobre $4M(j)$ y $4N(j)$	109
2 Tabla XIX Cálculos de $N(j)$ y $N_p(j)$ cuando se Eligen Cuatro Meses de Muestra.	112
3 Tabla XX Primer Método de Cálculo de $N(j)$ y $N_p(j)$	113
4 Tabla XXI Segundo Método de Cálculo de $N(j)$ y $N_p(j)$	114
APENDICE VII	116
1 Glosario de Símbolos	117
BIBLIOGRAFIA	121

PREFACIO 2

La expansión global de la educación y la investigación; la disponibilidad de una enorme cantidad de recursos informativos; la producción, sin precedente, de información; la dificultad creciente de satisfacción de las necesidades de información - impuestos sobre las bibliotecas por los usuarios; y sobre todo la crisis económica actual ha creado una situación desalentadora para las bibliotecas. Estos problemas han forzado a las autoridades bibliotecarias a buscar alternativas de operación en términos de costo-beneficio y aplicar técnicas nuevas para optimizar los pocos recursos disponibles.

La biblioteca es, básicamente, un concepto simple pero la diversidad de sus usuarios y sus necesidades, la naturaleza casi intangible de los servicios que proporciona, y la dificultad de evaluación y medición de los beneficios derivados de ellos, hace que el proceso de planeación y administración sea complejo. Para vencer esta complejidad, es necesario que los méto-

dos tradicionales de administración por experiencias e intuiciones sean reemplazados por la administración científica.

La administración científica se orienta hacia la resolución de problemas y utiliza modelos analíticos para realizar los objetivos de la organización. Un modelo es simplemente una representación de algunos aspectos del mundo real y es, por lo general, matemático en la naturaleza. Estos modelos cambian los problemas complejos de tipo administrativo, que podrían parecer demasiado caóticos o demasiado inciertos de tratar, a estructuras racionales que podrían ser analizadas por métodos objetivos y cuantitativos. El pasado se puede describir y el futuro se puede predecir sobre los cambios que sucederán en las situaciones del mundo real representados por los modelos. El propósito cabal de los modelos es buscar la mejor combinación de los factores que están bajo el control del administrador para mejorar el desempeño de la organización y que sus metas sean más factibles de alcanzar.

Es necesario hacer hincapié sobre un punto; algunos bibliotecarios tienen la noción errónea que los modelos les dictan lo que debe llevarse a cabo y que esos modelos toman las decisiones por ellos. Por lo contrario, la responsabilidad de la toma de decisiones recae sobre la persona y no sobre los modelos. Los modelos no tienen magia, pero sabiendo lo que resultara en el futuro, en base de las decisiones que se tomen en el presen

te, permitirán al bibliotecario planear adecuadamente las actividades de la biblioteca en los períodos posteriores.

El presente libro trata sobre la evaluación y el uso de obras monográficas utilizando los modelos probabilísticos de Philip M. Morse y contiene algunos conceptos y operaciones matemáticas de un cierto grado de dificultad lo cual podría resultar un poco ajeno para algunos bibliotecarios. Esto es, desafortunadamente, una situación necesaria debido a que no se pueden presentar algunos conceptos sin dejar a un lado la terminología y notaciones concernientes a los conceptos bajo discusión. No obstante, se han intentado explicar los modelos de la manera mas clara posible apoyándose en ejemplos tangibles y concretos.

INTRODUCCION 3

El primer intento para utilizar la teoría de probabilidad y técnicas analíticas para la predicción del uso de libros, fue realizado por Philip M. Morse, Profesor Emérito en Física del Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT) en 1962. El y sus estudiantes en un curso de investigación de operaciones empezaron a desarrollar modelos teóricos apropiados sobre las operaciones en la biblioteca de ciencias del MIT. En 1968, su prestigiado libro **Library Effectiveness: A System Approach** fue publicado por Editorial MIT.

Morse utilizó la teoría de proceso de Markov para desarrollar sus modelos de evaluación de obras monográficas, y probó con un mínimo margen de error que sus modelos matemáticos pueden aplicarse a la evaluación de cualquier acervo monográfico. En 1972 y 1975, Morse junto con Chen amplió y modificó los modelos para hacerlos mas sencillos y confiables.

Morse menciona, en el prefacio, que su libro lo escribió con

la esperanza de que sea de utilidad para dos grupos de personas diferentes: los bibliotecarios, algunos de ellos están menos avergonzados de reconocer su falta de conocimiento en matemáticas que su dominio del latín; y los analistas de sistemas o los expertos de investigación de operaciones quienes -comprenden matemáticas pero poseen poco conocimiento sobre -las realidades de las bibliotecas. Más adelante, él comenta -su expectativa de que los bibliotecarios no se detengan por -las ecuaciones, por el contrario que utilicen sus significatiuvos en palabras, gráficas y tablas.

Aún más adelante, Morse menciona que la biblioteca es, esencialmente, un almacén de información y las únicas características de la biblioteca radican en las interacciones entre las unidades de información, o sea libros y publicaciones perióducas, y buscadores de la información, o sea los usuarios. Por lo tanto, dice él, que su libro se concentra en el patrón del uso de libros, su cambio con el tiempo, y la problemática de estimar y evaluar el grado que la biblioteca satisfaga o deje de satisfacer a los usuarios en relación con la búsqueda de -la información.

En base a los modelos de Morse, se realizaron algunas investiugaciones en diferentes bibliotecas en Estados Unidos. Ellas -son: a) Chen, en 1974, bajo la asesoría de Morse, aplicó los modelos al acervo de Allen Library of Cleveland Health Science Library de la Universidad de Case Western Reserve como su te-

sis de doctorado y en 1976 evaluó el acervo de Francis A. -
Countway Library of Medicine de la Universidad de Harvard; -
b) Spurlock y Yen, en 1978, investigaron el uso de libros en
el área de Ciencia de Vida en la biblioteca de Ciencias del -
MIT; y c) Hoffman, en 1978, aplicó los modelos a la colección
del Centro Kresger, el cual es un centro de materiales de do-
cencia ubicada en la biblioteca del Colegio de Lesley en el -
Estado de Nueva Inglaterra.

El presente libro es resultado de un conjunto de circunstan-
cias: institucional, individual y temporal. En 1984, el autor
empezó su labor en el Centro Universitario de Investigaciones
Bibliotecológicas de la Universidad Nacional Autónoma de México
como investigador en el área de evaluación de las colecciones,
con énfasis en los modelos matemáticos. Durante la revi-
sión bibliográfica, el autor se enfrentó con muchos estudios
relacionados con el uso de libros en las bibliotecas: la mayor
ría de naturaleza cualitativa y en menor número con enfoque -
cuantitativo. Después de un estudio, relativamente profundo -
sobre los métodos cuantitativos, el autor decidió aplicar y -
probar los modelos matemáticos de Morse a una colección de -
obras monográficas de una biblioteca académica. Estos modelos
fueron elegidos debido a su extensión y rigor científico en -
el campo.

La biblioteca "Lic. Raúl Baillers Jr." del Instituto Tecnoló-
gico Autónomo de México (ITAM) fue seleccionado para llevar a

cabo el estudio por dos razones: una, la disposición y amplio apoyo del Bibliotecario Mayor del ITAM; y la otra porque esta biblioteca cumple con los requisitos necesarios en cuanto a colección, organización y orden de sus registros de préstamo.

Durante el proceso de la investigación el autor llegó a comprender que los modelos de Morse son relativamente intangibles para aquellos bibliotecarios que no poseen antecedentes o experiencias en matemáticas. Por ende, se optó escribir este libro con el fin de analizar y discutir, paso por paso, los razonamientos matemáticos en relación con el desarrollo de los modelos y sus aplicaciones. Los ejemplos contenidos en este libro están basados en los datos actuales obtenidos de la investigación del autor en la biblioteca de ITAM, excepto los datos incluidos en el Apéndice VI que son ficticios.

El autor espera poder cumplir dos metas con este libro: primera explicar las ecuaciones en la forma más comprensiva y sencilla que sea posible; y segunda, dar a conocer, por primera vez en México, los modelos de Morse entre los responsables de las bibliotecas a fin de que cuenten con una herramienta cuantitativa para la evaluación de las obras monográficas en sus bibliotecas.

MODELOS TEORICOS DE MORSE **4**

Supuestos Básicos

Existen tres supuestos básicos en relación al Modelo Morse-Markov. Ellos son:

1. El proceso de la circulación* de libros es aleatoria. En otras palabras el uso de libros en una biblioteca por sus usuarios es resultado de muchos eventos aleatorios. El comportamiento de un usuario o el grado de uso de un libro dado, no se puede predecir con certidumbre. No se puede en alguna manera conjeturar que el libro A circulará tantas veces mientras que el libro B no circulará ni una vez en el próximo año. No obstante, el promedio de la circulación de una clase de libros se puede predecir con la precisión dependiendo del número de la muestra o el tiempo incluido

* En este documento el término "circulación" se define como un préstamo por parte de un usuario de la biblioteca.

en dicha predicción,

2. Por lo general, la circulación de libros decrece exponencialmente con el tiempo.**
3. Hay una correlación de tiempo de un período al próximo, o "memoria", en el uso de libros.

Algunas explicaciones sobre el punto tres. El simple modelo probabilístico que exhibe una correlación de tiempo, o "memoria", es el conjunto de ecuaciones que definen lo que se conoce como el Proceso de Markov. Este modelo describe el comportamiento de un sistema que puede estar en cualquier número de estados diferentes; por lo tanto, el estado del libro será la circulación del mismo en un año dado. En el proceso de Markov, el estado del sistema al final de un período dado, se determina por su estado al principio del período. Por ejemplo; si un libro circuló m veces en el último año, sus posibilidades de circulación en el próximo año se expresan como la distribución de probabilidad, dependiendo de m pero indirectamente en la historia de la circulación del libro. Por consiguiente, si una clase de libros obedece el proceso de Markov en relación a su circulación, entonces la probabilidad de que un libro que circuló m veces en el año t circulará n veces en el año $t+1$ es -

** Para este punto véase: H.H. Fussler and J.L. Simson, **Patterns in the use of Books in Large Research Libraries** y también las obras de Richard W. Trueswell citadas en la bibliografía.

T_{mn} * donde el valor de T_{mn} depende de m pero indirectamente de la historia anterior del libro.

Con el fin de mostrar como funcionan estos conceptos se presentan los datos actuales de la clase 300-399, Tabla I, de la Biblioteca del Instituto Tecnológico Autónomo de México - (ITAM). Los datos fueron obtenidos durante el mes de Septiembre de 1984, con el propósito de aplicar el modelo Morse-Markov para evaluar las obras monográficas de esta biblioteca. - La explicación sobre la construcción de esta tabla se ha dado en el Apéndice I** pero utilizando los datos de la clase 900-999*** de la biblioteca del ITAM.

Los símbolos de la Tabla I se definen de la siguientes manera:

m =Número de la circulación en el año t

n =Número de la circulación en el año $t+1$

* T_{mn} se conoce como la probabilidad transicional; el tránsito de m circulación a n circulación en los años t y $t+1$ respectivamente.

** En el Apéndice I también se han explicado los pasos necesarios sobre el registro de la circulación.

*** Tomamos como ejemplo la clase 900-999 en donde circularán 32 libros porque la extensión es menor en su construcción, mientras que en la clase 300-399 circularon 780 libros y su construcción sería de mayor magnitud para mostrar en este documento.

TABLA I

VALORES DE $M(m)$, N_{mn} y $N(m)$ PARA DIFERENTES VALORES DE m Y n DE LA CLASE 300-399

m	N _{mn}																N(m)	Teor.		
	M(m)	n=0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14			15	16
0	353	156	78	43	43	16	2	8	4	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1.36	2.01
1	242	56	62	39	30	18	9	7	8	3	5	1	3	0	0	0	1	0	2.36	2.23
2	117	28	23	17	15	6	12	6	3	3	0	1	0	1	1	1	0	0	2.70	2.46
3	98	19	8	18	13	6	10	6	4	4	5	1	1	2	0	1	0	0	3.64	2.68
4	55	6	8	11	15	3	1	4	2	3	1	1	0	0	0	0	0	0	3.15	2.91
5	46	9	5	2	5	7	7	4	2	0	0	2	2	0	0	1	0	0	3.93	3.13
6	25	6	3	2	3	3	0	3	4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	3.44	3.35
7	20	4	3	2	1	0	2	3	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	4.35	3.58
8	12	4	0	2	1	0	2	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	3.58	3.80
9	6	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	3.50	4.02
10	3	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.00	4.25
11	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5.00	4.47
12	2	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4.00	4.70
13	2	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.50	4.92
14	2	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	6.50	5.14
15	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	8.00	5.37

ALFA = 2.011 BETA = 0.224

PONDERADO ALFA = 2.011 BETA = 0.224

M =Número total de ejemplares (par de años) en la muestra*

$M(m)$ =Número de ejemplares con m circulación en el año t

N_{mn} =Número de ejemplares con m circulación en el año t y n circulación en el año $t+1$

$N(m)$ =El promedio de la circulación durante el año $t+1$ dado que la muestra tiene m circulación en el año t .

Regresando a la Tabla I se puede observar, por ejemplo que hubo 6 libros que circularon 9 veces en el año t . El número de la circulación para estos libros en el año $t+1$ es: un libro con cero circulación; un libro con una circulación; un libro con dos, uno con tres, uno con cuatro y el sexto con once circulaciones. El promedio de estos libros, $N(m)$, se calcula como:

$$N(9) = \frac{(1 \times 0) + (1 \times 1) + (1 \times 2) + (1 \times 3) + (1 \times 4) + (1 \times 11)}{6} = 3.50$$

Los valores teóricos serán explicados un poco mas adelante. Pero, antes que nada una explicación breve sobre el cálculo de los valores de alfa (α) y beta (β) de la Tabla I.

Cálculo de los Parámetros de α y β

Si trazamos los valores de $N(m)$ contra los valores de m , se obtiene una relación lineal que será expresada en la forma:

*En la tabla I el valor de M es igual al 985 (suma de los valores bajo la columna $M(m)$).

$$(1) \quad N(m) = \alpha + \beta m$$

se puede observar que la ecuación (1) es exactamente la misma que la de $Y = a + bX$ (la ecuación de línea recta). En álgebra sabemos que a y b son intercepto y pendiente de la línea recta; Y es la variable dependiente y X es la variable independiente. El valor de a se obtiene cuando $X=0$. Lo mismo ocurre sobre la ecuación (1) donde $N(m)$ es variable dependiente; α es intercepto y su valor es igual al valor de $N(m)$ cuando $m=0$; β es la pendiente y m es la variable independiente. Se puede mostrar algebraicamente que la pendiente de la función lineal es igual al valor del coeficiente de la variable independiente.

Para el cálculo de los valores de α y β es necesario aplicar la técnica del mínimo cuadrado. Existen dos conjuntos de fórmulas para este cálculo:

$$(2) \quad \begin{cases} a = \bar{Y} - b\bar{X} \\ b = \frac{\sum XY - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum X^2 - n\bar{X}^2} \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} a = \frac{\sum Y - b\sum X}{n} \\ b = \frac{n\sum XY - \sum X\sum Y}{n\sum X^2 - (\sum X)^2} \end{cases}$$

Aplicando las fórmulas (3) y tomando en cuenta que m , $N(m)$, $mN(m)$ y m^2 corresponden a X , Y , XY , y X^2 se construye la Tabla II y que nos permite calcular los parámetros de α y β .

TABLA II

El cálculo de α y β para los datos de la Tabla I por la técnica del mínimo cuadrado.

m (X)	$N(m)$ (Y)	$m \cdot N(m)$ (XY)	m^2 (X ²)
0	1.36	0.00	0
1	2.36	2.36	1
2	2.70	5.40	4
3	3.64	10.92	9
4	3.15	12.60	16
5	3.93	19.65	25
6	3.44	20.64	36
7	4.35	30.45	49
8	3.58	28.64	64
9	3.50	31.50	81
10	1.00	10.00	100
11	5.00	55.00	121
12	4.00	48.00	144
13	2.50	32.50	169
14	6.50	91.00	196
15	8.00	120.00	225

$$\Sigma X=120 \quad \Sigma Y=59.01 \quad \Sigma XY=518.66 \quad \Sigma X^2=1240 \quad (\Sigma X)^2=14400 \quad n=16$$

$$\beta = \frac{(16 \times 518.66) - (120 \times 59.01)}{(16 \times 1240) - (14400)} = 0.224$$

$$\alpha = \frac{(59.01) - (0.224 \times 120)}{16} = 2.001$$

Como se mencionó alfa es el intercepto y beta la pendiente de la ecuación de la línea recta. Pero, ¿cómo se pueden interpretar los significados de estos dos parámetros en relación al modelo Morse-Markov? Alfa mide el valor de un libro a lar-

go plazo en tanto que beta mide la reacción inmediata de un libro justamente después de su publicación. En otras palabras una alfa mayor indica que muchos libros de una clase no serán obsoletos rápidamente y continuarán siendo útiles por un tiempo largo. Por otro lado, la rapidez con la que un libro de una clase disminuye su popularidad año por año es representado por beta. El valor de beta debe ser menor que la unidad; entre más pequeño es el parámetro beta (si es considerablemente menor que la unidad), es más rápido el promedio de la circulación de libros de una clase decrece desde el promedio de la circulación del año anterior, así la clase se acerca a su promedio final o su estado equilibrio. El valor de alfa disminuye con el tiempo mientras tanto el valor de beta parece ser constante durante la vida de un libro, independientemente del tiempo.*

Se explicó antes que $N(m)$ significa el promedio de la circulación en el año $t+1$ de aquellos libros que tenían m circulación en el año t . Por ejemplo, si el valor de $N(m)$, para $m=9$, es igual al 4.02 en el año 1984, este valor de $N(m)=4.02$ depende en la circulación del mismo libro que tenía $m=9$ circulación en el año 1983. Este promedio, $N(m)$, en el año $t+1$ (1984) no depende, explícitamente, en la antigüedad de libros ni en las

* Véase apéndice II sobre la comparación de alfas y betas de ocho clases de la biblioteca del ITAM.

circulaciones anteriores de 1983 (1982, 1981,...).

Se puede observar en la Tabla I que los valores de alfa y beta son 2.011 y 0.224 respectivamente. Al reemplazar estos valores en la fórmula (1) obtenemos:

$$N(m) = 2.011 + 0.224m$$

Esto quiere decir si seleccionamos un libro al azar de esta clase con m circulación en el año t , su circulación esperada en el año $t+1$ será 2.011 más 0.224 veces de su circulación en el año t . Esto significa que la circulación de libros disminuye, por lo general, cuando la antigüedad de libros se incrementa.

La fórmula (1) tiene muchas ventajas matemáticas; puesto que es lineal en α , β y m los valores promediados dan promedios en la misma manera. Por ejemplo, si tenemos diferentes muestras de la misma clase durante diversos períodos, los promedios de alfas y betas se pueden calcular por las siguientes ecuaciones:

$$(4) \quad \alpha = \frac{M_1 \alpha_1 + M_2 \alpha_2 + \dots}{M_1 + M_2 + \dots}$$

$$(5) \quad \beta = \frac{M_1 \beta_1 + M_2 \beta_2 + \dots}{M_1 + M_2 + \dots}$$

donde M_1 y M_2 son los números totales de ejemplares en la primera y segunda muestra respectivamente con los valores correspondientes de α_1 , α_2 y β_1 y β_2 para las dichas muestras.

De la Tabla I se pueden derivar las siguientes fórmulas:

$$(6) \quad M = M(0) + M(1) + M(2) + \dots + \sum M(m) \quad \text{para } m=0,1,2,\dots$$

$$(7) \quad M(m) = Nm_0 + Nm_1 + Nm_2 + \dots = \sum Nmn \quad \text{para } n=0,1,2,\dots$$

$$(8) \quad N(m) = 1/M(m) \sum nNmn \quad \text{para } n=0,1,2,\dots$$

$$(9) \quad N(m) = \sum nTmn \quad \text{para } n=0,1,2,\dots$$

Como se puede observar, se han dado tres fórmulas diferentes - para el cálculo de $N(m)$; fórmulas (1), (8) y (9). Hay que enfatizar que la fórmula (8) es el cálculo de $N(m)$ a través de los valores experimentales como se calculó antes el valor de $N(9)=3.50$. Las fórmulas (1) y (9) se conocen como el cálculo teórico de $N(m)$. Se ha dado suficiente explicación sobre la fórmula (1); solamente es necesario hacer aclaraciones en relación de la fórmula (9).

Probabilidad Transicional

T_{mn} se conoce como la probabilidad transicional; el tránsito de m circulación en el año t a n circulación en el año $t+1$. Se puede presentar también la notación de T_{mn} en la forma - $P(n|m)$ que significa la probabilidad de obtener n circulación

en el año $t+1$ dado m circulación en el año t . Como se sabe la notación de $P(n|m)$ se conoce como la probabilidad condicional. Antes de discutir lo relacionado al cálculo de T_{mn} es necesario exponer brevemente sobre la distribución de "Poisson" ya que a partir de éste se calcula T_{mn} .

Por el supuesto número uno, el proceso de la circulación de libros es aleatoria y desde luego la distribución de la circulación puede tomarse como la distribución de Poisson. Este tiene las siguientes características:

1. Los eventos tienen las mismas probabilidades de ocurrencia en cualquier intervalo de tiempo que el otro.
2. La ocurrencia de un evento no tiene efecto sobre la ocurrencia de la otra.
3. La probabilidad de dos eventos que ocurran simultáneamente en un intervalo arbitrario pequeño de tiempo es cero.

La formulación matemática del proceso de Poisson se deriva de las tres características arriba citadas y se expresa por la fórmula:

$$(10) \quad P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

donde $P(k)$ es la probabilidad de k ocurrencias que se llevarán a cabo en una unidad de tiempo; λ es el número promedio de ocurrencias por intervalo; $e=2.71828$, la base de logaritmo

natural; y $k!$ se conoce como k factorial.

Volvimos al cálculo de T_{mn} , la probabilidad de n circulación en el año $t+1$ dado m circulación en el año t . Se utiliza la fórmula (10) con los valores de $N(m)=\alpha+\beta m$ y n en sustitución de λ y k . Se obtiene:

$$(11) \quad T_{mn} = \frac{(\alpha + \beta m)^n}{n!} e^{-(\alpha + \beta m)}$$

Poniendo diferentes valores de $m=0,1,2,\dots$ y de $n=0,1,2,\dots$ con $\alpha=2.011$ y $\beta=0.224$ (estos dos parámetros fueron calculados en la Tabla II) en la fórmula (11) se producirá la matriz de la probabilidad de la clase 300-399, Tabla XII, que se presenta en el Apéndice III. Con esta matriz y la fórmula (9) se pueden calcular valores teóricos de la Tabla I. Para mostrar la aplicación de la fórmula (9) se calculará el valor teórico para $m=9$

$$\begin{aligned} N(9) = & (0.018 \times 0) + (0.072 \times 1) + (0.145 \times 2) + (0.194 \times 3) + (0.195 \times 4) + \\ & (0.157 \times 5) + (0.106 \times 6) + (0.061 \times 7) + (0.031 \times 8) + (0.014 \times 9) + \\ & (0.060 \times 10) + (0.002 \times 11) + (0.001 \times 12) + (0.000 \times 13) + \\ & (0.000 \times 14) + (0.000 \times 15) + (0.000 \times 16) + (0.000 \times 17) = 4.02 \end{aligned}$$

Surge una pregunta con respecto a dos valores de $N(m)$. ¿Por qué $N(m)$ experimental y $N(m)$ teórico? Morse durante el desarrollo de sus modelos matemáticos tomó los valores experimentales, los manipuló matemáticamente para llegar a los parámetros y valores teóricos que podrían representar situaciones

reales de una biblioteca. Surge otra pregunta ¿por qué, entonces existen diferencias entre los valores experimentales y teóricos de la Tabla I? Hay que destacar que la diferencia radica en que el investigador únicamente tomó una muestra durante el mes de septiembre de 1984. Si el investigador hubiera tomado 4 muestras diferentes y aplicado las Fórmulas (4) y (5) para los cálculos de α y β , la diferencia entre los valores experimentales y teóricos hubiera sido mínima.

La Distribución Geométrica de la Circulación en el Primer año

Morse encontró que la distribución de la circulación de los libros en su primer año es geométrica* con un parámetro que él llamó γ , si fueron adquiridos al mismo tiempo y con los mismos valores de alfa y beta. En otras palabras la fracción de los libros que circularon m veces o más en su primer año, asignado como $P_1(\geq m)$, es:

$$(12) \quad P_1(\geq m) = \gamma^m$$

Desde luego la fracción de los libros que circularon exactamente m veces es:

$$(13) \quad P_1(m) = P(\geq m) - P_1(\geq m+1)$$

* La distribución geométrica se expresa como $P(X=x) = pq^{x-1}$ para $x=1,2,3,\dots$ donde $P(x)$ es la probabilidad de la función de distribución geométrica.

Sustituyendo γ^m de la fórmula (12) en la fórmula (13) nos da:

$$P_1(m) = \gamma^m - \gamma^{m+1}$$

$$(14) \quad P_1(m) = \gamma^m (1 - \gamma)$$

Si se asigna \bar{R} como el promedio de la circulación en el primer año el valor de \bar{R} será:

$$(15) \quad \bar{R} = \sum m P_1(m) \quad \text{para } m=0,1,2,\dots$$

En la fórmula (15) cuando $m=0$, el valor de $mP_1(m)$ será cero - también y no tiene valor significativo para el cálculo de \bar{R} . - Por lo tanto la fórmula (15) en su nueva forma será:

$$(16) \quad \bar{R} = \sum m P_1(m) \quad \text{para } m=1,2,\dots$$

Sustituyendo el valor de la fórmula (14), en la fórmula (16), tenemos:

$$(17) \quad \bar{R} = \sum m (1 - \gamma) \gamma^m \quad \text{para } m=1,2,\dots$$

Si desarrollamos la sumatoria con diferentes valores de $m=1,2,3,\dots$ surge:

$$\begin{aligned} \bar{R} &= 1(1-\gamma)\gamma^1 + 2(1-\gamma)\gamma^2 + 3(1-\gamma)\gamma^3 + 4(1-\gamma)\gamma^4 + \dots \\ &= \gamma - \gamma^2 + 2\gamma^2 - 2\gamma^3 + 3\gamma^3 - 3\gamma^4 + 4\gamma^4 - 4\gamma^5 + \dots \\ &= \gamma + \gamma^2 + \gamma^3 + \gamma^4 + \gamma^5 + \dots \end{aligned}$$

Se ha probado en álgebra que si el valor de γ es mayor que -1 y

menor que +1 la expresión $\gamma + \gamma^2 + \gamma^3 + \gamma^4 + \gamma^5 + \dots$ es igual a $\frac{\gamma}{1-\gamma}$.
Entonces el promedio de la circulación en el primer año será:

$$(18) \quad \bar{R} = \frac{\gamma}{1-\gamma}$$

Ahora calcularemos el valor de γ en término de \bar{R} desde la fórmula (18):

$$(19) \quad \begin{aligned} \bar{R} - \bar{R}\gamma &= \gamma \\ \bar{R} &= \gamma + \bar{R}\gamma = \gamma(1 + \bar{R}) \\ \gamma &= \frac{\bar{R}}{1 + \bar{R}} \end{aligned}$$

El cálculo de $P_1(m)$ en términos de \bar{R} sigue los siguientes pasos:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\bar{R}}{1 + \bar{R}} \\ 1 - \gamma &= 1 - \frac{\bar{R}}{1 + \bar{R}} = \frac{1 + \bar{R} - \bar{R}}{1 + \bar{R}} = \frac{1}{1 + \bar{R}} \end{aligned}$$

En la fórmula $P_1(m) = (1-\gamma)\gamma^m$ insertamos los valores de $1/(1+\bar{R})$ y $\frac{\bar{R}}{1+\bar{R}}$ en $(1-\gamma)$ y γ respectivamente surge lo siguiente:

$$(20) \quad \begin{aligned} P_1(m) &= \left(\frac{1}{1+\bar{R}}\right) \left(\frac{\bar{R}}{1+\bar{R}}\right)^m = \left(\frac{1}{1+\bar{R}}\right) \left[\frac{(\bar{R})^m}{(1+\bar{R})^m}\right] \\ P_1(m) &= \frac{(\bar{R})^m}{(1+\bar{R})^{m+1}} \end{aligned}$$

Libros activos e inactivos

Si asignamos N_a y N_0 como los números de libros activos* e inactivos** respectivamente entonces el número total de libros de una colección será:

$$(21) \quad N = N_a + N_0$$

En términos de fracciones $N_a/N = C(t)$ y $N_0/N = P_0(t)$. Por lo tanto tenemos:

$$(22) \quad C(t) + P_0(t) = 1$$

$$(23) \quad C(t) = 1 - P_0(t)$$

$$(24) \quad P_0(t) = 1 - C(t)$$

Los valores de $C(t)$ y $P_0(t)$ son mensurables cuando se conoce el valor de N .

Se mencionó antes que la fracción de los libros que circulan exactamente m veces en su primer año tiene la forma de - - $P_1(m) = \gamma^m (1 - \gamma)$, fórmula (14). Se explicó, también, que la distribución de la circulación de libros en el primer año es geométrica. Si sustituimos $P_m(t)$ y $\gamma(t)$ por $P_1(m)$ y γ respectivamente en la fórmula (14) y utilizamos la fracción de libros -

* Libros activos son aquellos que circulan.

** Libros inactivos son aquellos que no circulan.

activos, $N_a/N=C(t)$, entonces la probabilidad de los libros que circulan m veces puede expresarse como:

$$(25) \quad P_m(t) = C(t) \left[1 - \gamma(t) \right] \left[\gamma(t) \right]^{m-1} \quad \text{para } m \geq 1$$

La fórmula (25) trata de la probabilidad y desde luego la suma de las probabilidades es igual a uno. Por consiguiente tenemos:

$$(26) \quad \sum P_m(t) = 1 \quad \text{para } m \geq 0$$

La fórmula (26) puede desarrollarse en la siguiente manera:

$$(27) \quad \sum P_m(t) = P_0(t) + \sum P_m(t) = 1 \quad \text{para } m \geq 1$$

El cálculo del promedio de la circulación en el año t , $\bar{R}(t)$, - en términos de la fracción de libros activos sigue los pasos:

$$(15) \quad \bar{R}(t) = \sum m P_m(t) \quad \text{para } m \geq 0$$

$$(28) \quad \bar{R}(t) = \sum m P_m(t) \quad \text{para } m \geq 1$$

Si insertamos el valor de $P_m(t)$ de la fórmula (25) en la fórmula (28) tendremos:

$$(29) \quad \bar{R}(t) = \sum m C(t) \left[1 - \gamma(t) \right] \left[\gamma(t) \right]^{m-1} \quad \text{para } m \geq 1$$

Desarrollamos la sumatoria de $\bar{R}(t)$ en la fórmula (29) para diferentes valores de $m=1,2,3,\dots$ y después sumamos los resulta-

dos. Nos da lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 m=1 \quad C(t) [1-\gamma(t)] [\gamma(t)]^0 &= C(t) - C(t) [\gamma(t)]^1 \\
 m=2 \quad 2C(t) [1-\gamma(t)] [\gamma(t)]^1 &= 2C(t) [\gamma(t)]^1 - 2C(t) [\gamma(t)]^2 \\
 m=3 \quad 3C(t) [1-\gamma(t)] [\gamma(t)]^2 &= 3C(t) [\gamma(t)]^2 - 3C(t) [\gamma(t)]^3 \\
 m=4 \quad 4C(t) [1-\gamma(t)] [\gamma(t)]^3 &= 4C(t) [\gamma(t)]^3 - 4C(t) [\gamma(t)]^4 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 C(t) + C(t) [\gamma(t)]^1 + C(t) [\gamma(t)]^2 + C(t) [\gamma(t)]^3 + \dots &= \\
 C(t) \left\{ 1 + [\gamma(t)]^1 + [\gamma(t)]^2 + [\gamma(t)]^3 + \dots \right\} &
 \end{aligned}$$

La expresión dentro de la llave tiene la forma $1+x+x^2+x^3+\dots$ que algebraicamente es igual a $1/1-x$. Entonces el promedio de la circulación en el año t se da como:

$$(30) \quad \bar{R}(t) = \frac{C(t)}{1-\gamma(t)}$$

Las fórmulas (23), (24), (25) y (30) expresan los valores para el año t . La aplicación de estas mismas fórmulas para el año $t+1$ necesita la probabilidad transicional, T_{mn} . Por lo tanto se obtiene:

$$(31) \quad P_m(t+1) = \sum P_m(t) T_{mn} \quad \text{para } m \geq 0$$

Si separamos del lado derecho de la fórmula (31) la parte correspondiente al valor de m cuando es igual a cero, tendremos:

$$P_m(t+1) = P_0(t) T_{0n} + \sum P_m(t) T_{mn} \quad \text{para } m \geq 1$$

Insertamos el valor de $P_0(t)$ de la fórmula (24) en la expresión anterior Nos da:

$$(32) \quad P_m(t+1) = [1 - C(t)] T_{0n} + \sum P_m(t) T_{mn} \quad \text{para } m \geq 1$$

En la fórmula (32) ponemos $m=0$ y $n=0$. La fórmula cambia a:

$$(33) \quad P_0(t+1) = [1 - C(t)] T_{00} + \sum P_m(t) T_{m0} \quad \text{para } m \geq 1$$

Se calculan los valores de T_{00} y T_{m0} según la fórmula (11):

$$T_{00} = \frac{(\alpha + \beta_0)^0}{0!} e^{-(\alpha + \beta_0)}$$

$$(34) \quad T_{00} = e^{-\alpha}$$

$$T_{m0} = \frac{(\alpha + \beta_m)^0}{0!} e^{-(\alpha + \beta_m)}$$

$$(35) \quad T_{m0} = e^{-(\alpha + \beta_m)}$$

Poniendo los valores de las expresiones matemáticas (34), (35) y (25) en fórmula (33) nos da:

$$(36)$$

$$P_0(t+1) = [1 - C(t)] e^{-\alpha + \sum C(t)} [1 - \gamma(t)] [\gamma(t)]^{m-1} e^{-(\alpha + \beta_m)}$$

Con cierta manipulación algebraica la fórmula (36)* reduce a:

$$(37) \quad P_0(t+1) = e^{-\alpha} [1 - H(t)]$$

$$(38) \quad H(t) = \frac{C(t)}{1 + J(t)}$$

$$(39)** \quad J(t) = \frac{1 - \gamma(t)}{e^{\beta} - 1} = \frac{C(t)}{\bar{R}(t)(e^{\beta} - 1)}$$

Una vez que los valores de α , β , γ y \bar{R} han sido calculados desde los datos de la circulación en el año t , la fracción de libros activos, el valor de γ *** y el promedio de la circulación para el año $(t+1)$ pueden calcularse como sigue:

$$(40) \quad C(t+1) = 1 - P_0(t+1)$$

$$(41)*** \quad \gamma(t+1) = \frac{\bar{R}(t+1)}{[1 + \bar{R}(t+1)]}$$

$$(42)**** \quad \bar{R}(t+1) = \alpha + \beta \bar{R}(t)$$

* Véase apéndice IV para esta manipulación algebraica.

** Se usa la fórmula (30) para el valor de $1 - \gamma(t)$ que es igual al $C(t)/\bar{R}(t)$.

*** El valor de γ se calcula desde la fórmula (19) y es $\gamma = \frac{\bar{R}}{1 + \bar{R}}$

**** Observese la similitud entre la fórmula (42) y la fórmula $N(m) = \alpha + \beta m$.

Extensión de Modelos Teóricos de Morse

Hasta el momento la discusión sobre los modelos y el desarrollo de las ecuaciones fueron expuestas como si se conociera la historia de la circulación de libros en el primer año de su vida después de la adquisición (año t) de ellos. Era a partir de este punto de vista que los parámetros correspondientes fueron calculados para los años próximos (año $t+1$). Pero se conoce muy bien que en la mayoría de las bibliotecas se descartan, mejor dicho se destruyen, las tarjetas de préstamo y por lo tanto no se puede calcular el promedio de la circulación (\bar{R}) y la fracción correspondiente, $P_1(m)$, a este promedio. Hubo necesidad para vencer esta dificultad y hacer los modelos más flexibles y aún más sencillos y científicos por lo que Morse junto con Chen modificó sus modelos. La extensión de ellos se discutirá en las siguientes páginas.

Distribución de la circulación en el período de la Muestra

Se mencionó antes que este investigador recogió los datos de la circulación de obras monográficas en el mes de septiembre de 1984, con el propósito de aplicar y probar el modelo Morse-Markov en la biblioteca del ITAM. En cualquier biblioteca existen N libros de una clase dada; en el caso de la biblioteca del ITAM hubo $M(a)$ libros que circularon durante el mes de septiembre (el mes de la muestra), de los cuales $M(1)$ libros

circularon una vez durante los 12 meses anteriores. En otras palabras de $M(a)$ libros que circularon durante el mes de septiembre de 1984, $M(1)$ libros tenían solamente una circulación durante el año; empezando en octubre de 1983 hasta fines de septiembre de 1984. De la misma manera hubo $M(2)$ de $M(a)$ libros que circularon 2 veces durante los 12 meses anteriores con, por lo menos, una circulación durante el mes de septiembre. Entonces, en forma general, $M(j)$ de $M(a)$ libros circularon j veces durante el año precedente al final del mes de la muestra. Por supuesto, j es número de la circulación durante el mes de septiembre y no puede ser cero. Por lo tanto tenemos la relación

$$M(a) = \sum M(j) \quad \text{para } j=1,2,3,\dots$$

que significa que el número total de libros que circularon durante el mes de la muestra es igual a la suma de libros que circularon 1,2,3,... j veces.

Factor de corrección

La suma de $M(j)$ no es igual al número total de los libros que circularon durante los 12 meses anteriores, puesto que la circulación de un libro dado es una ocurrencia aleatoria en el tiempo; esto significa que algunos libros que circularon antes en el año (11 meses anteriores: octubre de 1983-agosto de 1984)

sucede que no se prestaron en el mes de septiembre cuando los datos fueron obtenidos. Por lo tanto es necesario encontrar una manera para conocer el número de aquellos libros que circularon antes pero no en el mes de la muestra.

Se mencionó que $M(1)$, $M(2)$, $M(3)$, ..., $M(j)$ son el número de libros que circularon 1, 2, 3, ... j veces durante el mes de muestra. Lo que estamos buscando es $N(1)$, $N(2)$, $N(3)$, ..., $N(j)$ que son el número de libros que no circularon durante el mes de muestra. Aprovechamos la teoría de probabilidad para resolver este problema. Asignamos ρ como la probabilidad de la circulación y empezamos con $M(1)$ libros que circularon una vez con la probabilidad de ρ . La probabilidad de que esta circulación no ocurra es $1-\rho$ y la probabilidad que esta circulación ocurra es $1-(1-\rho)$. $M(2)$ es el número de libros que circularon 2 veces con la probabilidad de circulación de ρ ; la probabilidad que una circulación no ocurra es $1-\rho$ y la probabilidad de la otra circulación que no ocurra es también $1-\rho$ y la probabilidad que ambas no ocurran es, por lo tanto, $(1-\rho)^2$. La probabilidad que estas dos circulaciones ocurren es $1-(1-\rho)^2$. Entonces en forma general la probabilidad de la circulación de $M(j)$ libros con j circulación será ρ y la probabilidad de no ocurrencia de j circulación será $(1-\rho)^j$ y la probabilidad de ocurrencia será $1-(1-\rho)^j$.

Si se multiplica la probabilidad de ocurrencia de una circulación por el número de $N(1)$ debe darnos el número de $M(1)$.

Por ende, si $M(1)$ y $1-(1-\rho)$ son conocidos el valor de $N(1)$ puede ser calculado. Se presentan estos conceptos de la siguiente manera:

<u># De Libro</u>	<u>Circulación</u>	<u>Probabilidad</u>	<u>No Ocurrencia</u>	<u>Ocurrencia</u>
$M(1)$	1	ρ	$(1-\rho)^1$	$1-(1-\rho)^1$
$M(2)$	2	ρ	$(1-\rho)^2$	$1-(1-\rho)^2$
$M(3)$	3	ρ	$(1-\rho)^3$	$1-(1-\rho)^3$
.				
.				
.				
$M(j)$	j	ρ	$(1-\rho)^j$	$1-(1-\rho)^j$

$$\begin{aligned}
 M(1) &= N(1) \times \left[1-(1-\rho)^1 \right] \\
 M(2) &= N(2) \times \left[1-(1-\rho)^2 \right] \\
 M(3) &= N(3) \times \left[1-(1-\rho)^3 \right] \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 M(j) &= N(j) \times \left[1-(1-\rho)^j \right]
 \end{aligned}$$

Por lo tanto el valor de $N(j)$ será:

$$(43) \quad N(j) = \frac{M(j)}{1-(1-\rho)^j}$$

Cálculo de ρ

De la fórmula (43) se puede observar que los valores de $M(j)$ - son conocidos, puesto que son los libros que circularon en el mes de la muestra, Pero ¿cómo se calcula el valor de ρ ? el valor de ρ se cal

cula fácilmente a partir de la estadística anual de la circulación de la biblioteca. Antes que se discuta sobre el cálculo de ρ , es necesario aclarar algunos puntos al respecto.

Si considera $N(1)$ libros de una clase dada que circulan solamente una vez ($j=1$) en un año y si la circulación mensual es aproximadamente constante durante el año, entonces $1/12$ de $N(1)$ libros circulan cada mes. Esto quiere decir: si se escoge un libro al azar de todos los $N(1)$ libros, la probabilidad de que ese libro circule durante el período de la muestra es ρ donde $\rho=1/12$ (siempre y cuando el período de la muestra es un mes y la circulación es constante durante el año). Por ende, existe la relación $N(1)=M(1)/\rho$ en donde ρ es la fracción apropiada del período de la muestra.

Pero se sabe que la circulación mensual de cada biblioteca no es constante y varía según factores externos e internos. La mejor estimación para el cálculo de ρ será sumar la circulación mensual a lo largo de 4 ó 5 años y sacar el porcentaje de la circulación en relación de la circulación total de estos 4 ó 5 años. En otras palabras, es necesario uniformar la circulación del mes de la muestra. Este investigador calculó el valor de $\rho=1/9^*$ para el mes de septiembre de la bibliote-

* La biblioteca del ITAM presta todo su acervo bibliográfico a domicilio y acumula estadísticas mensuales del uso de la ... (continua en la siguiente página)

ca del ITAM. Esto significa que la circulación del mes de septiembre para esta biblioteca es $1/9$ veces de la circulación total. En el Apéndice V se presentan la gráfica de la circulación 1980-1984, datos de la circulación y valores de ρ y los cálculos de $1/[1-(1-\rho)^j]$ y $1/1-e^{-j}$ para diferentes valores de ρ de la biblioteca del ITAM.

Libros Desconocidos

Como se puede apreciar los valores de $M(j)$ no son representativos, pero se observó por la fórmula (43), que estos valores parciales pueden acercarse a los valores reales. Es necesario hacer otra corrección para estar en la posición de estimar la circulación anual, porque cuando se están localizando los libros en estantería para registrar la historia de su circulación se presentan algunos problemas al respecto, tales como:

- 1) Se encuentran prestados
- 2) Pérdida o proceso de encuadernación
- 3) Saturación de la tarjeta de préstamo que es descartada, contando el libro con una nueva tarjeta.
- 4) Nueva adquisición

* colección. El valor de $\rho = 1/9$ es para toda la colección y no pertenece a las obras monográficas. Por lo tanto el autor optó en escoger $1/11$ como el valor de ρ en el mes de septiembre para los cálculos correspondientes.

Por lo tanto de los libros que circularon durante el mes de la muestra, $M(j)$, hay D libros donde el valor de j es desconocido debido a los problemas arriba mencionados. Por ende, tenemos

$$M(a) = \sum M(j) + D \quad j=1,2,3,\dots$$

A fin de obtener valores más precisos se multiplica uniformemente los $M(j)$ por un factor de corrección:

$$(44) \quad \sum M(j) + D / \sum M(j)$$

Por esta ecuación se supone que la circulación de D libros fue aproximadamente igual que los $M(j)$ libros.

Libros Potenciales

Si se recuerda, empezamos de los datos originales, $M(j)$, que fueron parciales y por ahí hicimos dos correcciones para ser imparciales. Todavía se necesita ser aún más imparcial porque también existen algunos libros que no circulan en el mes de la muestra y tampoco circularán durante 11 meses precedente del mes de muestra pero tienen potencial para circular. Asignamos estos libros con el símbolo N_p . Si podemos calcular el número de los libros activos y potenciales y restamos el número de los libros activos se obtiene el número de los libros potenciales. Asignamos los libros activos y potenciales como

$N(j,0)$. Matemáticamente se puede expresar lo anterior como:

$$N_p = N(j,0) - N(j)$$

La misma lógica que se empleó para los $N(j)$ libros será aplicada al respecto de $N(j,0)$ libros. $N(1,0)$ libros son libros que circulan una vez y los libros que tienen potencial para circular una vez pero no circulan. La probabilidad de no ocurrencia para estos libros se expresa como e^{-1} y la probabilidad de ocurrencia como $1 - e^{-1}$; e siendo la base de logaritmo natural. Así mismo la probabilidad de no ocurrencia de $N(2,0)$ libros con dos circulaciones es e^{-2} y probabilidad de ocurrencia igual al $1 - e^{-2}$. Entonces, en forma general la probabilidad de no ocurrencia de $N(j,0)$ con j circulación es e^{-j} y la probabilidad de ocurrencia $1 - e^{-j}$. Si se multiplica la probabilidad de ocurrencia, $1 - e^{-j}$, por el número de libros que circulan j veces, debe darnos los $N(j)$ libros. Se presentan estos conceptos de la siguiente manera:

<u># de libro</u>	<u>Circulación</u>	<u>Probabilidad</u>	<u>Probabilidad de ocurrencia</u>
$N(1,0)$	1	e^{-1}	$1 - e^{-1}$
$N(2,0)$	2	e^{-2}	$1 - e^{-2}$
$N(3,0)$	3	e^{-3}	$1 - e^{-3}$
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
$N(j,0)$	j	e^{-j}	$1 - e^{-j}$
$N(j) = N(j,0) (1 - e^{-j})$			

Por lo tanto el valor de $N(j,0)$ será:

$$(45) \quad N(j,0) = \frac{N(j)}{1 - e^{-j}}$$

Si se aplican las fórmulas (43), (44) y (45) a los datos de la clase 900-999 (Tabla X de la historia de la Circulación de la clase 900-999, Apéndice I) nos da la Tabla III. El valor de $M(j)$ se calcula a partir de la fila 83-84. Se puede observar en esta fila que existe 13 libros que circularon una vez; 4 libros que circularon 2 veces; 3 libros que circularon 3 veces; un libro que circuló 9 y 3 libros que circularon 10 veces. Esto nos da un total de 24 libros. El número de libros desconocidos es 7; libros número 12, 13, 14, 24, 27, 29 y 31. Los libros desconocidos más los 24 libros da un total de 31 libros. El libro número 7 es el mismo que el número 6 y no se puede contar. Por lo tanto, los 32 libros de la clase 900-999 están tomados en cuenta.

Distribución Geométrica

Si trazamos los valores de $M(j)$ y $N(j)$ contra j en papel semi logarítmico, los valores de $N(j)$ siguen casi una línea recta con cierta cantidad de fluctuación, más notable con los números pequeños. Esto significa que la distribución de la circulación de los $N(j)$ después de la corrección*, es geométrica**.

* véase en la siguiente página.

**véase en la siguiente página.

TABLA III

PARA VALOR DE $R_0 = 1 / 11$
 PARA VALOR DE $D = 7$

DISTRIBUCION NO CORREGIDA DE LA CLASE 900-999

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	suma
N(j)	13	4	3	0	0	0	0	0	1	3	24
N(j)	143	23	12	0	0	0	0	0	2	5	185
Geom	143	32	7	2	0	0	0	0	0	0	185

DISTRIBUCION CORREGIDA DE LA CLASE 900-999

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	suma
N(j)	185	30	16	0	0	0	0	0	2	6	239
Geom	185	42	9	2	0	0	0	0	0	0	239

DISTRIBUCION DE LIBROS ACTIVOS Y POTENCIALES
DE LA CLASE 900-999

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	suma
N(j)	185	30	16	0	0	0	0	0	2	6	239
N(j,0)	292	34	16	0	0	0	0	0	2	6	352

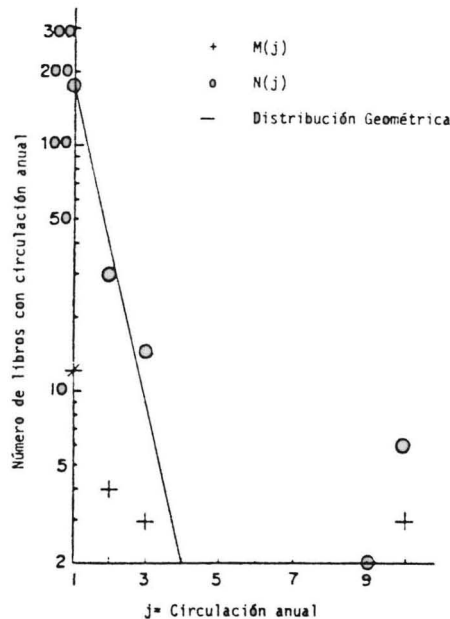
La gráfica 1 muestra este concepto. La fórmula de la distribución geométrica de la circulación es expresada como:

$$(46) \quad N(j) = Na(1-\gamma)\gamma^{j-1} \quad j=1,2,3,\dots$$

donde γ es el parámetro de la distribución geométrica y Na la suma de los valores de $N(j)$.

GRAFICA 1

DISTRIBUCION CORREGIDA Y NO CORREGIDA DE LA CIRCULACION DE LA CLASE 900-999



* Esto quiere decir multiplicar los valores de $N(j)$ y Geom - uniformemente en la distribución no corregida por la fórmula (44), $\Sigma M(j) + D / \Sigma M(j) = 24 + 7/24 = 31/24$, para darnos la distribución corregida.

** La distribución geométrica se expresa como $P(X=x) = pq^{x-1}$ para $x=1,2,3,\dots$ donde $P(x)$ es la probabilidad de la función de distribución geométrica, p es la probabilidad de éxito y q la probabilidad de fracaso (no éxito). La notación pq^{x-1} puede expresarse también como $(1-q)q^{x-1}$. Obsérvese - la similitud entre la fórmula (46) y la probabilidad de la función de distribución geométrica.

Cálculos de N_a , N_p , N_M y C .

En la Tabla III se puede apreciar que la suma de los $N(j)$ son los libros activos, libros que circularon en el mes de la muestra (Septiembre 1984) y libros que circularon en los 11 meses inmediatos antes de Septiembre 1984. Se puede observar también, que la suma de $N(j,0)$ son los libros que tienen potencial para circular pero no circularon ni en el mes de la muestra ni en los 11 meses anteriores más los libros activos. Al asignar la suma de $N(j)$ y $N(j,0)$ como N_a y N_M respectivamente y la diferencia de $N(j,0) - N(j)$ como N_p y la fracción de libros activos como C , se obtiene las siguientes ecuaciones:

$$(47) \quad N_a = \sum N(j) \quad \text{para } j=1,2,3,\dots$$

$$(48) \quad N_M = \sum N(j,0) \quad \text{para } j=1,2,3,\dots$$

$$(49) \quad N_p = \sum N(j,0) - \sum N(j) = N_M - N_a$$

$$(50) \quad C = N_a / N_M$$

Cálculos de R_a , $N(>j)$, $F(>j)$ y γ

Ahora manipulamos las fórmulas (46), (47), (48), (49) y (50) - para llegar a otras fórmulas que calculen el promedio de la circulación anual de los libros activos, R_a ; número de libros que circularon más que j veces, $N(>j)$; la fracción correspondiente a $N(>j)$, $F(>j)$ y lo más importante, el cálculo del parámetro γ .

Empezamos con el cálculo del parámetro γ ; siendo el parámetro de la distribución geométrica. En la fórmula (46) ponemos $j=1$ que nos da:

$$N(1) = N_a(1-\gamma)\gamma^{1-1}$$

$$N(1) = N_a(1-\gamma)\gamma^0 \quad (\gamma^0=1)$$

$$N(1) = N_a(1-\gamma)$$

$$1-\gamma = \frac{N(1)}{N_a}$$

$$(51) \quad \gamma = 1 - \frac{N(1)}{N_a}$$

De la fórmula (51) se puede observar que el valor de γ debe ser siempre, menor que la unidad.

El promedio de la circulación anual de los libros activos, R_a , por la definición será

$$(52) \quad R_a = \sum jN(j)/N_a \quad \text{para } j=1,2,3,\dots$$

Para el cálculo de R_a en términos de γ insertamos el valor de $N(j)$ de la fórmula (46) en la fórmula (52):

$$R_a = \frac{\sum jN_a(1-\gamma)\gamma^{j-1}}{N_a} = \sum j(1-\gamma)\gamma^{j-1}$$

Desarrollamos la sumatoria para diferentes valores de $j=1,2,3,$

...

$$j=1 \quad 1(1-\gamma)\gamma^{1-1} = (1-\gamma)$$

$$j=2 \quad 2(1-\gamma)\gamma^{2-1} = 2(1-\gamma)\gamma$$

$$j=3 \quad 3(1-\gamma)\gamma^{3-1} = 3(1-\gamma)\gamma^2$$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Sumamos los términos desarrollados:

$$R_a = (1-\gamma) + 2(1-\gamma)\gamma + 3(1-\gamma)\gamma^2 + \dots = (1-\gamma)(1 + 2\gamma + 3\gamma^2 + \dots)$$

La expresión adentro del segundo paréntesis es una serie armónica que tiene la forma

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

por lo tanto tenemos lo siguiente:

$$R_a = (1-\gamma) \frac{1}{(1-\gamma)^2}$$

$$(53) \quad R_a = \frac{1}{1-\gamma}$$

Ahora manipulamos la fórmula (51) para obtener otra fórmula de R_a :

$$\gamma = 1 - \frac{N(1)}{N_a}$$

$$1-\gamma = \frac{N(1)}{N_a}$$

$$(54) \quad \frac{1}{1-\gamma} = \frac{N_a}{N(1)}$$

Puesto que R_a en la fórmula (53) es igual al $1/1-\gamma$ y $N_a/N(1)$ en la fórmula (54) es igual al $1/1-\gamma$ por lo tanto tenemos

$$(55) \quad R_a = \frac{N_a}{N(1)}$$

El número de libros que circularon más de j veces, $N(>j)$, son la suma de libros que circularon $N(j+1)$, $N(j+2)$, $N(j+3)$,... Por ejemplo el número de libros que circularon más de 5 veces es la suma de $N(5+1)$, $N(5+2)$, $N(5+3)$,... que serán los libros que circularon 6, 7, 8,... veces. La fórmula (46) expresa el número de libros que circularon exactamente j veces; por lo tanto el número de libros que circularon $j+1$, $j+2$, $j+3$,... será expresado matemáticamente como:

$$N(j+1) = N_a (1-\gamma) \gamma^{j+1-1}$$

$$N(j+2) = N_a (1-\gamma) \gamma^{j+2-1}$$

$$N(j+3) = N_a (1-\gamma) \gamma^{j+3-1}$$

Desarrollando las expresiones nos da lo siguiente

$$\begin{aligned}
 N(j+1) &= N_a (1-\gamma) \gamma^j = N_a (\gamma^j - \gamma^{j+1}) \\
 N(j+2) &= N_a (1-\gamma) \gamma^{j+1} = N_a (\gamma^{j+1} - \gamma^{j+2}) \\
 N(j+3) &= N_a (1-\gamma) \gamma^{j+2} = N_a (\gamma^{j+2} - \gamma^{j+3}) \\
 \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\
 \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\
 \vdots & \quad \quad \quad \vdots
 \end{aligned}$$

Puesto que N_a es comun se puede factorizar. Por ende tenemos

$$N(>j) = N_a (\gamma^j - \gamma^{j+1} + \gamma^{j+1} - \gamma^{j+2} + \gamma^{j+2} - \gamma^{j+3} + \dots)$$

Se puede observar que las expresiones dentro del paréntesis - pueden ser eliminadas dado que son signos opuestos. La expresión única que queda dentro del paréntesis es γ^j . Por consiguiente tenemos

$$(56) \quad N(>j) = N_a \gamma^j$$

Asignamos $F(>j)$ como la fracción de libros que circularon más de j veces correspondiente a $N(>j)$. Por la definición la fracción de libros que circularon más de j veces es igual al número de libros que circularon más de j veces por su número correspondiente de la circulación entre la circulación total. En notación matemática esto quiere decir lo siguiente:

$$F(>j) = \frac{N(j+1)(j+1) + N(j+2)(j+2) + N(j+3)(j+3) + \dots}{N_a R_a}$$

En el párrafo anterior se calcularon los valores de $N(j+1)$, $N(j+2)$, $N(j+3)$,... Insertamos estos valores en la expresión de $F(>j)$:

$$F(>j) = \frac{(j+1)N_a(1-\gamma)\gamma^j + (j+2)N_a(1-\gamma)\gamma^{j+1} + (j+3)N_a(1-\gamma)\gamma^{j+2} + \dots}{N_a R_a}$$

N_a es común en el numerador y puede factorizarse

$$F(>j) = \frac{N_a [(j+1)(1-\gamma)\gamma^j + (j+2)(1-\gamma)\gamma^{j+1} + (j+3)(1-\gamma)\gamma^{j+2} + \dots]}{N_a R_a}$$

Eliminamos N_a de nominador y denominador e insertamos el valor de $1/R_a$ de la fórmula (53) en la expresión anterior. Esto nos da

$$F(>j) = (1-\gamma) \left[(j+1)(1-\gamma)\gamma^j + (j+2)(1-\gamma)\gamma^{j+1} + (j+3)(1-\gamma)\gamma^{j+2} + \dots \right]$$

Multiplicamos las expresiones dentro de los corchetes y paréntesis y las ordenamos

$$F(>j) = j\gamma^j + \gamma^j + \gamma^{j+1} + \gamma^{j+2} + \gamma^{j+3} + \dots - j\gamma^{j+1} - \gamma^{j+1} - \gamma^{j+2} - \gamma^{j+3} - \gamma^{j+4} + \dots$$

$$F(>j) = j\gamma^j + \gamma^j - j\gamma^{j+1} = \gamma^j (j+1 - j\gamma)$$

$$(57) \quad F(>j) = \gamma^j \left[j(1-\gamma) + 1 \right]$$

Comparación de los valores experimentales y teóricos

Es oportuno, en este momento, mostrar la utilización de las -

fórmulas (47) a la (57) con ejemplos concretos para que los lectores asimilen los conceptos. Para este fin las fórmulas serán aplicadas a la Tabla IV, clase 300-399. La razón es simplemente que en la clase 300-399 circularon 718 libros durante el mes de la muestra, mientras que en la clase 900-999 circularon 31 libros. Por ende los datos de la primera son más confiables.

Aplicamos las fórmulas (47) a la (50) a los datos de la Tabla IV. Esto nos da:

$$N_a = \sum N(j) = 1407 + 727 + 488 + 168 + 118 + 103 + 65 + 34 + 26 + 16 + 20 + 10 + 0 + 2 + 2 + 2 = 3189$$

$$N_M = \sum N(j, 0) = 2226 + 841 + 513 + 171 + 119 + 103 + 65 + 34 + 26 + 16 + 20 + 10 + 0 + 2 + 2 + 2 = 4152$$

$$N_p = \sum N(j, 0) - \sum N(j) = 4152 - 3189 = 963$$

$$C = N_a / N_M = 3189 / 4152 = 0.768$$

Como se puede observar existen 3189 libros activos y 963 libros potenciales en esta clase. En total hay 4152 libros útiles en la clase de 300-399. La fracción de libros activos entre libros activos y potenciales (N_M) es igual al 0.768.

Calculamos el promedio de la circulación anual según las fórmulas (52), (53) y (55):

$$(52) \quad R_a = \sum jN(j) / N_a$$

$$\begin{aligned} \sum jN(j) &= (1407)(1) + (727)(2) + (488)(3) + (168)(4) + (118)(5) + \\ &\quad (103)(6) + (65)(7) + (34)(8) + (26)(9) + (16)(10) + (20)(11) + \\ &\quad (10)(12) + (0)(13) + (2)(14) + (2)(15) + (2)(16) = 7756 \end{aligned}$$

TABLA IV

PARA VALOR DE $R_0 = 1 / 11$
 PARA VALOR DE $D = 246$

DISTRIBUCION NO CORREGIDA DE LA CLASE 300-399

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	suma
N(j)	77	76	73	32	27	27	19	11	9	6	8	4	0	1	1	1	372
N(j)	847	438	294	101	71	62	39	21	16	10	12	6	0	1	1	1	1920
Geom	847	473	264	148	83	46	26	14	8	5	3	1	1	0	0	0	1920

DISTRIBUCION CORREGIDA DE LA CLASE 300-399

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	suma
N(j)	1407	727	488	168	118	103	65	34	26	16	20	10	0	2	2	2	3189
Geom	1407	786	439	246	137	77	43	24	13	7	4	2	1	1	0	0	3189

DISTRIBUCION DE LIBROS ACTIVOS Y POTENCIALES
DE LA CLASE 300-399

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	suma
N(j)	1407	727	488	168	118	103	65	34	26	16	20	10	0	2	2	2	3189
N(j,0)	2226	841	513	171	119	103	65	34	26	16	20	10	0	2	2	2	4152

$$R_a = 7756/3189 = 2.43$$

Ahora se calcula el valor de R_a utilizando las fórmulas (53) y (55). Para la fórmula (53) es necesario, primero calcular el valor del parámetro γ de la fórmula (51).

$$(51) \quad \gamma = 1 - \frac{N(1)}{N_a} = 1 - \frac{1407}{3189} = 0.559$$

$$(53) \quad R_a = \frac{1}{1-\gamma} = \frac{1}{1-0.559} = 2.27$$

$$(55) \quad R_a = \frac{N_a}{N(1)} = \frac{3189}{1407} = 2.27$$

Como es obvio se calculó el promedio de la circulación por tres fórmulas. La fórmula (52) es el cálculo de R_a por medio de los datos experimentales, mientras las fórmulas (53) y (55) son las fórmulas teóricas. Existe una diferencia entre el valor experimental y teórico de R_a que es ignorable cuando se toma en cuenta que todos los modelos descritos son modelos probabilísticos. Hay que enfatizar, otra vez, que la construcción de los modelos matemáticos siempre empieza con los datos experimentales y si a partir de éstos, los valores de los modelos teóricos corresponden con los datos experimentales, los aceptamos.

Se mencionó que la fórmula (56) calcula el número de libros que circularon más de j veces y la fracción correspondiente a éste se expresa por la fórmula (57). Supongamos que queremos

saber el número de libros que circularon más de tres veces.

Aplicamos la fórmula (56) como sigue:

$$(56) \quad N(>j) = N_a \gamma^j$$

$$N(>3) = 3189(0.559)^3 = 557$$

La fracción correspondiente a estos 557 libros será:

$$(57) \quad F(>j) = \gamma^j \left[j(1-\gamma) + 1 \right]$$

$$F(>3) = (0.559)^3 \left[3(1-0.559) + 1 \right] = 0.41$$

Esto significa que hubo 557 libros que circularon más de tres veces y la circulación de estos 557 libros es 41 por ciento de la circulación total.

Las fórmulas (56) y (57) son teóricas; calculamos, ahora, los dos valores 557 y 41% a través de los datos experimentales. El número de libros que circularon más de tres veces son los libros que circularon $j+1$, $j+2$, $j+3$, $j+4$, $j+5$, $j+6$, $j+7$, $j+8$, $j+9$, $j+10$, $j+11$, $j+12$ y $j+13$ que serán $3+1$, $3+2$, $3+3$, ... y $3+13$. De la Tabla IV los valores de $N(>3)$ y $F(>3)$ son:

$$N(>3) = \sum N(j) = 168 + 118 + 103 + 65 + 34 + 26 + 16 + 20 + 10 + 0 + 2 + 2 + 2 = 566$$

$$F(>3) = (168)(4) + (118)(5) + (103)(6) + (65)(7) + (34)(8) + (26)(9) + (16)(10) +$$

$$(20)(11)+(10)(12)+(0)(13)+(2)(14)+(2)(15)+(2)(16)/7756^*=0.44$$

Se pueden observar pequeñas diferencias entre los valores teóricos y experimentales de $N(>3)$ y $F(>3)$. Tomando en cuenta una desviación de 9 y 0.03 respectivamente que abarca un lapso de un año y que estamos manejando modelos probabilísticos, estos errores son matemáticamente aceptables.

* El número 7756 se calculó por la fórmula $\sum jN(j)$ en los párrafos anteriores.

Estimación de la circulación anual

El lector puede recordar las fórmulas (47), (48), (49), (50), (55) y los valores calculados correspondientes a esas fórmulas de la clase 300-399 (Tabla IV) en las páginas anteriores. Los valores fueron:

$$N_a = 3189$$

$$N_p = 963$$

$$N_M = \sum N(j, 0) = 4152$$

$$C = N_a / N_M = 0.768$$

$$R_a = N_a / N(1) = 2.27$$

R_a es el promedio de la circulación de los libros activos y por lo tanto asignamos R_M como el promedio de los libros activos más potenciales. Dado que R_a y C son valores conocidos, el valor de R_M se calcula de la siguiente manera:

$$(58) \quad R_M = C R_a$$

$$R_M = (0.768)(2.27) = 1.74$$

Aclaremos un punto muy importante. Según la Tabla IV existen 3189 libros que circularon 1, 2, 3, ... 16 veces. Esto quiere decir que algunos libros circularon una vez, dos veces, tres veces.... dieciseis veces. El promedio de la circulación de estos 3189 libros es de 2.27. Debido a que existen 963 libros potenciales (tienen potencial para circular pero no circularon)

y agregamos esta cantidad a los libros activos, el promedio de libros activos y potenciales será, según la fórmula (58), 1.74.

Debido a que los valores de R_a , N_a , R_M y N_M son conocidos, la circulación anual se puede calcular de la siguiente manera:

$$(59) \quad R_a N_a = R_M N_M$$

$$(2.27)(3189) = (1.74)(4152)$$

Esto quiere decir que en la clase 300-399 la circulación anual será aproximadamente 7224 en un lapso de un año. (Octubre 1, - 1983-Septiembre 30, 1984).

Predicción de la circulación anual en los próximos años

Hasta el momento discutimos y calculamos los parámetros y valores para estar en la posición de predecir los valores en los próximos años. El lector recuerda que se mencionó que este autor escogió el mes de Septiembre de 1984 como el mes de la muestra. Teniendo el mes de Septiembre y 11 meses anteriores nos da un año completo que será el lapso de Octubre 1, 1983 hasta Septiembre 30, 1984. Los valores calculados en este documento pertenecen a este lapso de tiempo. Todas las calculaciones, tenían, solamente un propósito: preparar el camino para calcular valores en los años Octubre 1, 1984-Septiembre 30, 1985; - Octubre 1, 1985-Septiembre 30, 1986;... etc. Esto es precisamente el proceso de Markov en donde uno empieza de un determi-

nado lapso de tiempo y se lanza por otros tiempos en el futuro.

Los valores calculados para 0cubre 1, 1983-Septiembre 30, 1984 de la clase 300-399 son como sigue:

$$N_a=3189, R_a=2.27, C=0.768, R_M=1.74, \alpha_a=2.011$$

$$\beta=0.224, \gamma=0.559, R_M N_M=7224$$

Este lapso embarca el año t y es necesario calcular estos valores para el año $t+1$. Las fórmulas que utilizamos para el cálculo de los valores en el año $t+1$ son:

$$(60) \quad \alpha_M = C \alpha_a$$

$$(61) \quad R_M(t+1) = \alpha_M + \beta R_M(t)$$

$$(62) \quad R_M(t+1) = R_a(t+1) C(t+1)$$

$$(63) \quad R_a(t+1) N_a(t+1) = R_M(t+1) N_M(t+1)$$

$$(64) \quad \gamma(t+1) = 1 - \frac{1}{R_a(t+1)}$$

$$(40) \quad C(t+1) = 1 - P_0(t+1)$$

Una breve explicación sobre las fórmulas servirá para refrescar la memoria del lector.

El alfa calculado en la Tabla I es el alfa de los libros activos, libros que circularon durante el mes de Septiembre de 1984. Por lo tanto, se necesita el alfa de los libros activos más potenciales. Asignamos α_M como el alfa de los libros activos y potenciales y calculamos su valor por la fórmula (60), donde -

α_a es valor calculado en la Tabla I y C es la fracción de los libros activos, $C=N_a/N_M$.

La fórmula (61) es razonamiento matemático de la fórmula (1): $N(m)=\alpha+\beta m$ donde $N(m)$ es el promedio de la circulación en el año $t+1$, dado que la muestra tiene m circulación en el año t . Por lo tanto, el promedio de la circulación de los libros activos y potenciales en el año $t+1$, asignado como $R_M(t+1)$, es igual al alfa de N_M libros más el beta por el promedio de la circulación de los libros activos y potenciales en el año t .

Las fórmulas (62) y (63) son exactamente las mismas que (58) y (59) respectivamente pero las dos primeras con sub-índice de $t+1$ para distinguirlas del año t . Es obvio que en la fórmula (62) el valor de $C(t+1)$ debe ser calculado primero para conocer el valor de $R_a(t+1)$ y después insertar este valor en la fórmula (63) para el cálculo de $N_a(t+1)$. El valor de $C(t+1)$ debe calcularse por la fórmula (40).

La fórmula (64) es la manipulación y razonamiento matemático de la fórmula (53):

$$(53) \quad R_a = \frac{1}{1-\gamma}$$

$$\frac{1}{R_a} = 1-\gamma$$

$$\gamma = 1 - \frac{1}{R_a}$$

Si el valor de γ en el año t es igual a uno menos el recíproco de R_a del año t , por ende el valor de γ en el año $t+1$ será uno menos el recíproco de R_a del año $t+1$. La fórmula (64) es exactamente la expresión matemática de esta expresión verbal.

En la sección de libros activos e inactivos discutimos y desarrollamos fórmulas que nos llevaron a las fórmulas (36), (37), (38), (39) y (40). Además, manipulamos la fórmula (36) en el Apéndice IV paso por paso para el cálculo de $P_0(t+1)$. Esta fracción es la base del cálculo de $C(t+1)$ debido a que la suma de las fracciones de libros activos y no activos es igual a uno [véase fórmulas (22), (23) y (24)]

Ahora aplicamos las fórmulas (60)-(64) y (37)-(40) a la clase 300-399 para los cálculos de valores en el año $t+1$:

$$\alpha_M = (0.768)(2.011) = 1.544$$

$$R_M(t+1) = (1.544) + (0.224)(1.74) = 1.930$$

$$C(t+1) = 1 - (e)^{-1.544} \quad 1 - \frac{0.77}{1+J(t)}, \quad J(t) = \frac{1-0.559}{(e)^{0.224}-1}, \quad e = 2.71828$$

$$C(t+1) = 0.846$$

$$R_a(t+1) = 1.930 / 0.846 = 2.29$$

$$Na(t+1) = (4152)(1.930) / 2.29 = 3499$$

$$\gamma(t+1) = 1 - \frac{1}{2.29} = 0.563$$

Por lo tanto, los valores calculados para el año $t+1$ (Octubre 1, 1984-Septiembre 30, 1985) de la clase 300-399, serán:

$$N_a=3499, R_a=2.29, C=0.846, R_M=1.930, \alpha_M=1.544$$

$$\beta=0.224, \gamma=0.563, R_M N_M=8013$$

Ahora, tomamos estos valores como los valores del año t y aplicamos otra vez, las fórmulas (60)-(64) y (37)-(40) para los cálculos del año $t+1$ (Octubre 1, 1985-Septiembre 30, 1986).

En la Tabla V los valores y parámetros de la clase 300-399 han sido calculados para cuatro años (1983-1984, 1984-1985, 1985-1986, 1986-1987). Aunque es posible predecir la circulación anual para los años después del período 1986-1987, se ha encontrado que el valor de α cambia después de cuatro o cinco años y por lo tanto es necesario el nuevo valor de α para obtener una mayor precisión en los parámetros y valores pertinentes. Como se mencionó antes el valor de β parece ser constante durante la vida de un libro, independiente del tiempo.

TABLA V

Los parámetros y valores de la clase 300-399 en los años* (0), (1), (2) y (3)

Año	α_a	α_M	β	γ	N_a	N_M	$C=N_a/N_M$	R_a	R_M	$R_M N_M$
(0)	2.011	1.544	0.224	0.559	3189	4152	0.768	2.27	1.74	7224
(1)	2.011	1.544	0.224	0.563	3499	4152	0.846	2.29	1.93	8013
(2)	2.011	1.544	0.224	0.569	3544	4152	0.852	2.32	1.98	8221
(3)	2.011	1.544	0.224	0.571	3546	4152	0.853	2.33	1.99	8262

* año (0)=0ctubre 1, 1983-Septiembre 30, 1984

año (1)=0ctubre 1, 1984-Septiembre 30, 1985

año (2)=0ctubre 1, 1985-Septiembre 30, 1986

año (3)=0ctubre 1, 1986-Septiembre 30, 1987

CONCLUSIONES 5

Hasta este momento hemos discutido sobre los modelos matemáticos, calculamos valores y parámetros pertinentes de la clase 300-399 que tomamos como ejemplo para ilustrar la aplicación de las fórmulas de los modelos. Nos falta ahora poner los puntos en perspectivas para interpretar los resultados y comprender los modelos en su totalidad. Para este fin se presentan a continuación las tablas de los valores y parámetros de la circulación de libros de 8 clases de la biblioteca del ITAM que abarcan un período de cuatro años.

Es necesario explicar que los parámetros de α y β de la clase 700-799 no son de ninguna manera representativos de esta clase. Durante el mes de septiembre circularon solamente nueve libros en esta clase, de los cuales tres títulos fueron prestados dos veces cada uno y cuatro libros tenían la historia de la circulación solamente en el período de 83-84. Por lo tanto no hubo suficientes datos anteriores para que el cálculo de α y β se aproximará a los valores reales de dichos parámetros.

TABLA VI
OCTUBRE 1, 1983 - SEPTIEMBRE 30, 1984

CLASE	α	β	γ	N_a	N_M	$C=N_a+N_M$	α_M	R_a	R_M	$R_M N_M$
000-099	0.933	0.227	0.426	195	269	0.725	0.676	1.74	1.26	339
100-199	2.087	0.393	0.557	377	491	0.768	1.602	2.26	1.74	854
200-299	0.694	0.250	0.000	66	104	0.635	0.441	1.00	0.64	67
300-399	2.011	0.224	0.559	3189	4152	0.768	1.544	2.27	1.74	7224
500-599	2.673	0.072	0.614	731	928	0.788	2.106	2.59	2.04	1893
600-699	2.444	0.194	0.478	1884	2516	0.749	1.831	1.92	1.44	3623
800-899	0.519	0.082	0.145	83	126	0.659	0.342	1.17	0.77	97
900-999	0.241	0.882	0.226	239	352	0.679	0.164	1.29	0.88	310

$$\sum N_a = 6764$$

$$\sum N_M = 8938$$

$$\sum N_P = \sum N_M - \sum N_a = 2174$$

$$\sum R_M N_M = 14407$$

TABLA VII
OCTUBRE 1, 1984 - SEPTIEMBRE 30, 1985

CLASE	α_a	β	γ	N_a	N_M	$C=N_a+N_M$	α_M	R_a	R_M	$R_M N_M$
000-099	0.933	0.227	0.371	163	269	0.605	0.676	1.59	0.962	259
100-199	2.087	0.393	0.615	432	491	0.879	1.602	2.60	2.290	1124
200-299	0.694	0.250	0.254	47	104	0.447	0.441	1.34	0.601	63
300-399	2.011	0.224	0.563	3499	4152	0.846	1.544	2.29	1.930	8013
500-599	2.673	0.072	0.603	829	928	0.894	2.106	2.52	2.250	2088
600-699	2.444	0.194	0.585	2203	2516	0.875	1.831	2.41	2.110	5309
800-899	0.519	0.082	0.181	42	126	0.332	0.342	1.22	0.405	51
900-999	0.241	0.882	0.441	185	352	0.524	0.164	1.79	0.940	331

$$\sum N_a = 7400$$

$$\sum N_M = 8938$$

$$\sum N_P = \sum N_M - \sum N_a = 1538$$

$$\sum R_M N_M = 17238$$

TABLA VIII

OCTUBRE 1, 1985 - SEPTIEMBRE 30, 1986

CLASE	α_a	β	γ	N_a	N_M	$C=N_a+N_M$	α_M	R_a	R_M	$R_M N_M$
000-099	0.933	0.227	0.351	156	269	0.580	0.676	1.54	0.894	240
100-199	2.087	0.393	0.642	440	491	0.897	1.602	2.79	2.50	1228
200-299	0.694	0.250	0.265	45	104	0.436	0.441	1.36	0.591	61
300-399	2.011	0.224	0.569	3544	4152	0.852	1.544	2.32	1.98	8221
500-599	2.673	0.072	0.605	833	928	0.896	2.106	2.53	2.27	2107
600-699	2.444	0.194	0.605	2228	2516	0.887	1.831	2.53	2.24	5636
800-899	0.519	0.082	0.167	39	126	0.312	0.342	1.20	0.375	47
900-999	0.241	0.882	0.526	166	352	0.470	0.164	2.11	0.993	350

$$\sum N_a = 7451$$

$$\sum N_M = 8938$$

$$\sum N_P = \sum N_M - \sum N_a = 1487$$

$$\sum R_M N_M = 17890$$

TABLA IX
OCTUBRE 1, 1986 - SEPTIEMBRE 30, 1987

CLASE	α_a	β	γ	N_a	N_M	$C=N_a+N_M$	α_M	R_a	R_M	$R_M N_M$
000-099	0.933	0.227	0.346	155	269	0.575	0.676	1.53	0.879	236
100-199	2.087	0.393	0.652	441	491	0.902	1.602	2.87	2.58	1267
200-299	0.694	0.250	0.259	45	104	0.435	0.441	1.35	0.589	61
300-399	2.011	0.224	0.571	3546	4152	0.853	1.544	2.33	1.99	8262
500-599	2.673	.072	0.605	833	928	0.896	2.106	2.53	2.27	2107
600-699	2.444	0.194	0.608	2240	2516	0.890	1.831	2.55	2.27	5711
800-899	0.519	0.082	0.167	39	126	0.310	0.342	1.20	0.373	47
900-999	0.241	0.882	0.567	158	352	0.450	0.164	2.31	1.04	366

$$\sum N_a = 7457$$

$$\sum N_M = 8938$$

$$\sum N_p = \sum N_M - \sum N_a = 1481$$

$$\sum R_M N_M = 18057$$

Un $\alpha=3$ y un beta de -0.333 de una clase que cuenta con 9 libros circulados, definitivamente, muestra una distorsión en los datos.

Una revisión sobre las tablas nos indica que las clases 100, 300, 500 y 600 se usan y seguirán siendo usadas en los próximos años como se indican en los parámetros de alfa y los valores de Ra. La clase más usada con una alta circulación anual es 300-399; en promedio se obtuvo 47% de la circulación anual total. Las dos clases de 300-399 y 600-699 contribuyeron a la mayoría de la circulación total de esta biblioteca.

El cálculo del equilibrio de la circulación, $\alpha_M/1-\beta$, de las clases 100, 300, 500 y 600 es igual a 2.65, 2.00, 2.27 y 2.28 respectivamente. Esto significa que el promedio de la circulación en la clase 100, cuando alcance su estado de equilibrio, es aproximadamente 3 préstamos y en la clase 300 es de 2 préstamos en el año; asimismo es casi 5 préstamos en dos años para las clases de 500 y 600.

Los datos en estas cuatro tablas tienen implicaciones administrativas. Primero, le da al responsable de la biblioteca un panorama sobre el comportamiento de la colección de obras monográficas ¿Qué clases tiene una circulación baja? ¿Qué clases contribuyen más a la circulación anual? Combinando estas dos preguntas ¿Por qué una clase tiene un uso alto y la otra un uso bajo? Estos datos son herramientas que permite analizar el com

portamiento de la colección objetivamente y no subjetivamente.

Segundo, el responsable de la biblioteca puede calcular el número de los libros muertos por dos valores de N_a y N_p . Si el número total de libros en cada clase es conocido, N , y si restamos la suma de N_a y N_p , $N_a + N_p = N_M$, de N nos da los libros muertos ($N - N_M = N_d$). Los libros muertos son libros que no tienen potencial para circular y que no han circulado hace muchos años. El número de N_d en cada biblioteca no es bajo y en la mayoría de las colecciones monográficas este número constituye más que 50% de la colección.

¿Cómo se puede interpretar la existencia de los N_d libros en una biblioteca? Si dedicamos un poco de tiempo en las estanterías en búsqueda de estos libros, seguramente se encontraría que la información contenida en ellos ya está obsoleta o reemplazada por nuevos libros. Además, es posible que un porcentaje alto de estos libros ha llegado a la biblioteca por canje y/o donación que no corresponde a las áreas de los programas de estudio del instituto al cual pertenece la biblioteca. Por último, es posible que el proceso de selección no estuvo de acuerdo a las necesidades académicas y/o de investigación.

Los libros muertos ocupan espacio, el que absorbe gran parte del presupuesto. Si almacenamos estos libros en un almacén secundario fuera de la biblioteca en una manera compacta, podemos abrir más espacio para los libros nuevos, reducir los cos-

tos del mantenimiento y sobre todo aumentar la circulación*

Tercero, los responsables de las bibliotecas están constantemente bajo presión, por parte del personal académico y de los investigadores, para comprar más libros en sus áreas. Los datos de las últimas tablas son indicadores que ayudan a las autoridades para decidir como distribuir el escaso presupuesto - en las áreas prioritarias. La circulación o el uso de cada clase muestra, sin lugar a duda, qué departamento académico usa la biblioteca con más frecuencia que otro, por lo tanto merece tener más libros.

Después de esta breve discusión sobre las implicaciones administrativas, es necesario explicar tres puntos en relación de los modelos de Morse. El lector puede observar en las cuatro últimas tablas, que se han calculado los valores y parámetros del mismo número de libros en cada clase (véase en las Tablas VI-IX bajo la columna N_M). Esto significa que han asumido que la colección de obras monográficas es y será constante. Pero se sabe que cada biblioteca aumenta su acervo por nuevas adquisiciones. La pregunta es ¿no es posible que los números adquiridos cambian los valores y el parámetro de alfa? La respuesta es negativa debido a que los libros nuevos reemplazan a los libros ya existentes en relación de la información contenida en

* Muchos estudios en Inglaterra y Estados Unidos han mostrado que el descarte de los libros no útiles aumenta la circulación de los libros en la biblioteca.

ellos. Esto quiere decir que los usuarios utilizan más libros nuevos, por ende no consultan los libros antiguos. Este proceso mantiene, por lo general, los valores y el parámetro de alfa estables para cuatro o cinco años.

Segundo, los modelos discutidos en este texto tendrán más precisión si eligen cuatro meses de muestra. La mejor manera para escoger los meses será: un mes de alta circulación, uno de media alta, uno de media baja y uno de baja circulación. De esta manera, los datos proporcionarán cuatro alfas, cuatro betas, cuatro $M(j)$ y cuatro $N(j)$. Aplicando las fórmulas (4) y (5) obtenemos el promedio de alfa y beta. Para manipular los cuatro $M(j)$ $N(j)$ y así llegar a $M(j)$ y $N(j)$ promediados, el lector puede consultar el Apéndice VI con notaciones al respecto.

Tercero, es posible que algunos bibliotecarios piensan que los modelos matemáticos discutidos en este texto son demasiado complicados para aplicarlos. El autor quiere comentar que los modelos de Morse tienen, hasta cierto punto, un grado de dificultad. Esta dificultad surge a raíz de preparaciones académicas de algunos bibliotecarios. Un curso en estadística o métodos cuantitativos en bibliotecología es suficiente para vencer esta dificultad y asimilar los modelos en su totalidad. No se puede y no es lógico evitar la aplicación de los métodos científicos a las operaciones bibliotecarias debido a

nuestras debilidades académicas y profesionales. No existen modelos matemáticos fáciles de aplicar y que a la vez cuenten con rigor científico. Este rigor científico implica ciertos grados de complejidad y dificultad.

Los modelos de Morse tienen un alcance de cuatro o cinco años en relación con la predicción de los valores. Esto significa que los responsables del desarrollo de colecciones en obras monográficas pueden aplicar estos modelos casi cada cinco años. El autor quiere preguntar ¿No valdría la pena saber lo que está pasando en la biblioteca sobre el uso de obras monográficas cada cinco años? ¿No es prudente analizar servicios bibliotecarios objetivamente aunque nos cueste un poco de tiempo? Con la llegada de las máquinas de cómputo a las bibliotecas, la aplicación de estos modelos no serán tan difíciles.

Por último, el autor piensa firmemente que ya ha llegado el tiempo en que debemos observar y analizar las operaciones cotidianas de las bibliotecas con un acercamiento científico. Esto implica desvariar el camino tradicional de la bibliotecología, aplicar y probar métodos científicos aunque parezcan complicados y exijan mucho tiempo.

APENDICE I

- 1 Notas explicatorias sobre el registro de la circulación.**
- 2 Notas explicatorias sobre la construcción de la Tabla I utilizando los datos de la clase 900-999.**
- 3 Tabla X la historia de la circulación de la clase 900-999.**

Notas explicatorias sobre el registro de la circulación

Las bibliotecas ponen, por lo general, adentro de cada libro una tarjeta de circulación (tarjeta de préstamo) que se sella, en la columna de fecha de devolución, la fecha que el usuario debe devolver el libro a la biblioteca. El período de préstamo varía dependiendo de la biblioteca. En el caso de la biblioteca del ITAM se presta un libro del acervo general para un período de 2 semanas. Se presenta una tarjeta de circulación con sus fechas de devolución como sigue:

FRENTE

REVERSO

330.15 BB21T		41818
BRANSON, WILLIAM H.		
TEORIA Y POLITICA MACROECONOMICA		
FECHA DE DEVOLUCION	FIRMA Y NO. DE CUENTA	
13 MAR 1981	13540 <i>Kens</i>	
20 MAR 1981	13540 <i>Kens</i>	
31 MAR 1981	13540 <i>Kens</i>	
14 ABR 1981	13540 <i>Kens</i>	
23 ABR 1981	13540 <i>Kens</i>	
7 MAY 1981	13540 <i>Kens</i>	
29 MAY 1981	13540 <i>Kens</i>	
11 JUN 1981	13540 <i>Kens</i>	
17 SET 1981	13540 <i>Kens</i>	

FECHA DE DEVOLUCION	FIRMA Y NO. DE CUENTA
21 SET 1981	13540 <i>Kens</i>
17 NOV 1981	13540 <i>Kens</i>
4 FEB 1982	13540 <i>Kens</i>
8 FEB 1982	13540 <i>Kens</i>
22 FEB 1982	13540 <i>Kens</i>
23 MAR 1982	13540 <i>Kens</i>
13 ABR 1982	13540 <i>Kens</i>
27 ABR 1982	13540 <i>Kens</i>
2 JUN 1982	13540 <i>Kens</i>
6 JUN 1982	13540 <i>Kens</i>
29 JUN 1982	13540 <i>Kens</i>
2 JUL 1982	13540 <i>Kens</i>
10 NOV 1982	13540 <i>Kens</i>
1 DIC 1982	13540 <i>Kens</i>

Como se puede observar este libro, en particular, tiene 27 -
 circulaciones que están en el período 13 de marzo de 1981 hasta
 ta 17 de septiembre de 1984. Se puede ver también, que su últi
 tima fecha de devolución, es decir 17 de septiembre de 1984,
 se hubiera sellado bajo 1o. de diciembre de 1982 no bajo 31 -
 de agosto de 1981. La razón de este cambio es, simplemente, -
 que no hubo espacio bajo la fecha 1o. de diciembre de 1982.

Para mostrar los pasos necesarios de anotar la historia de libr
 bros, se presentarán solamente las fechas de devolución de un
 libro particular como sigue:

11 Feb. 1972	28 Sept. 1977
18 Mayo 1972	23 Feb. 1978
4 Nov. 1972	11 Mayo 1978
18 Mayo 1973	27 Mar. 1979
27 Jul. 1973	13 Agos. 1979
22 Mar. 1974	21 Mayo 1981
24 Mayo 1974	22 Abr. 1982
17 Jun. 1974	7 Dic. 1983
14 Nov. 1974	24 Jul. 1984
23 Sept. 1976	17 Sept. 1984
4 Mayo 1977	

La fecha 17 de Sept. 1984 indica que el usuario pidió prestado
 do el libro en la fecha 3 Sept. 1984.

Debemos, ahora, encontrar el número de circulación en cada año
 a partir de 17 Sept. 1984 hasta 11 Feb. 1972. Puesto que la -
 última fecha es 17 Sept. 1984, por lo tanto 18 Sept. 1983 - 17 -
 Sept. 1984 será el año indicado. Se puede ver que hay tres -
 circulaciones en este período (17 Sept. 1984, 24 Jul. 1984, 7
 Dic. 1983). Un año atras nos da 18 Sept. 1982 - 17 Sept. 1983.
 Podemos ver que en este lapso no hubo circulación o mejor di-

cho hubo cero circulación. La siguiente fecha será 18 Sept. - 1981 - 17 Sept. 1982 que solamente tiene una circulación (22 Abril 1982). 21 Mayo 1981 será adentro del lapso 18 Sept. 1980 - 17 Sept. 1981. El período 18 Sept. 1979 - 17 Sept. 1980 nos da cero circulación y 18 Sept. 1978 - 17 Sept. 1979 nos da 2 circulaciones (13 Agust. 1979, 27 Mar., 1979). Las tres fechas de - 11 Mayo 1978, 23 Feb. 1978 y 28 Sept. 1977 están adentro del período 18 Sept. 1977 - 17 Sept. 1978. Así continuamos hasta - terminar con las fechas. Por lo tanto la historia de la circu lación de este libro será:

Período	Número de circulación
83 - 84	3
82 - 83	0
81 - 82	1
80 - 81	1
79 - 80	0
78 - 79	2
77 - 78	3
76 - 77	2
75 - 76	0
74 - 75	1
73 - 74	3
72 - 73	3
71 - 72	2
70 - 71	
69 - 70	

Es necesario enfatizar que el registro de la circulación debe hacerse en base con las fechas de devolución y no debe agregar o quitar los números de circulación arbitrariamente. Esto sig nifica que en el período de 70-71 no debe poner cero (porque no se indica en la tarjeta que hubo circulación), tampoco se pueden quitar los ceros en los períodos de 82-83, 79-80 y 75-76. Alteración en los números de circulación cambiaría los va lores de alfa y beta, por lo tanto otros parámetros y cifras.

Regresando a la tarjeta de circulación antes presentada y siguiendo el procedimiento nos da el siguiente registro:

Período	Número de circulación
83 - 84	1
82 - 83	3
81 - 82	11
80 - 81	12

**Notas explicatorias sobre la construcción de la
Tabla I utilizando los datos de la clase 900-999**

Durante el mes de septiembre de 1984 circularon 32 libros en la clase 900-999*. Los números 1, 2, 3, ... 32, arriba de la primera línea significan: libros número uno, dos, tres ... y treinta y dos. Los números bajo cada libro, es el número de veces de la circulación de los libros correspondientes. Por ejemplo; el libro número uno circuló una vez en el período de 83-84 y 2 veces en el lapso de 82-83; así que el libro número 12 y 24 circularon una vez en el año 83-84 sin ninguna circulación en los años anteriores. Se puede ver que el libro número 4 tiene una larga historia de circulación empezando en el año 69-70 hasta 83-84. La historia de la circulación de libros se obtiene a través de las tarjetas de préstamo de los libros. En la fila 83-84 y bajo el libro 7 se escribió la letra "R" que significa que los libros 7 y 6 son el mismo. En los casos en que un libro circula más de una vez, se registra su historia solamente una vez y se utiliza R (para repetido) en las columnas -

* Véase Tabla X en este apéndice.

posteriores. Bajo la columna 13 y 14 no hay ningún número de la circulación. Esto significa que por ciertas razones no se encontró la historia de la circulación de estos dos libros.

Anteriormente se mencionó que el valor de alfa disminuye con el tiempo. Por lo tanto se construyó la Tabla I a partir del período 79-80 que constituye cuatro pares de años. Entonces empezamos de la fila 79-80, el libro 3 circuló cero veces en el año 79-80 (t), asimismo en el año 80-81 ($t+1$); el libro 4 circuló cero veces en el año t como en el año $t+1$; siguiendo el mismo razonamiento para los libros 8, 9, 11, 15, 16, 17, 18, 21, 22, 25, 28, 30 y 32. Se puede apreciar que la fila 79-80 es la circulación en el año t y la fila 80-81 en el año $t+1$. El registro de la circulación de estas dos filas queda como:

t	t+1=80/81
m	n
0	0,0,0,1,0,0,3,0
1	0,6,6,1
2	1,0,0

Ahora tomamos la fila 80-81 como año t y la fila 81-82 como año $t+1$. El libro 3 circuló cero veces en el año 80-81 (t), como en el año 81-82 ($t+1$); el libro 4 circuló cero veces en el año t y 1 vez en año $t+1$. La misma lógica se sigue para los libros 8, 9, 11, 15, 16, 17, 18, 21, 22, 25, 28, 30 y 32. El registro para estas dos filas es el siguiente:

t	t+1=81/82
m	n
0	0,1,0,0,0,0,0,0,0,1
1	1,0,2
2	
3	1
4	
5	
6	0,0

Una fila arriba nos da 81/82 como año t+1. Continuando con el libro 3, éste circuló cero veces en el año t, igualmente en el año t+1; el libro 4 circuló 1 vez en el año t, de la misma manera en el año t+1 y así sucesivamente para el resto de los libros (6, 8, 9, 10, 11, 15, 16, 17, 18, 21, 22, 25, 28, 30, 32). Por lo tanto tenemos el siguiente registro:

t	t+1=82/83
m	n
0	0,2,2,0,0,0,2,5,5,2
1	1,7,0,3,1
2	0
3	
4	0

Tomando la fila 82-83 como el año t y 83-84 como el año t+1 - se observa; que el libro uno circuló 2 veces en el año t y una vez en el año t+1; el libro dos circuló 2 veces en el año t y 2 veces en el año t+1; el libro 3 circuló cero veces en el año

t y una vez en el año t+1 y el libro 4 circuló una vez en el año t y una vez en el año t+1. Así contamos número de veces para los libros 5, 6, 8, 9, 10, 11, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 28, 30 y 32. El registro es:

t	t+1=83/84
m	n
0	1,1,1,1,1,2,3
1	1,10,1,2,1
2	1,2,1,1,1,2,3
3	3
4	1
5	9,10
6	
7	10

Ahora, si tomamos la fila 83-84 como el año t no hay otra fila que pueda tomarse como el año t+1. Por lo tanto el registro de la circulación se ha concluido. Agregando estos cuatro registros obtenemos:

t	t+1
m	n
0	0,0,0,1,0,0,,3,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,2,2,0,0,0,2,5,5,2,1,1,1,1,1,2,3
1	0,6,6,1,1,0,2,1,7,0,3,1,1,10,1,2,1
2	1,0,0,0,1,2,1,1,1,2,3
3	1,3
4	0,1
5	9,10
6	0,0
7	10

Debemos aclarar que no es necesario construir los registros de la circulación para cada par de años $(t, t+1)$ por separado y - después agregarlos para llegar al último registro. Se hizo así para mostrar el razonamiento involucrado en la construcción de éste.

El único paso que queda por hacer es ordenar los datos del - último registro. Se puede observar que con $m=0$ (año t) hay 17 ceros, 8 unos, 5 dos, 2 tres, y 2 cincos; para $m=1$ existen 3 ceros, 7 unos, 2 dos, un tres, 2 seis, un siete y un diez. - Así contamos los datos de n para los valores de $m=2,3,4,5,6$ y 7. Por lo tanto tenemos la siguiente tabla:

t	t+1										
	n=0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	17	8	5	2		2					
1	3	7	2	1			2	1			1
2	3	5	2	1							
3		1		1							
4	1	1									
5										1	1
6	2										
7											1

Al abrir una columna entre m y n y una fila arriba de n con - los símbolos $M(m)$ y N_{mn} respectivamente y llenando los espa- - cios blancos con ceros nos da el cuadro siguiente similar a - la Tabla I de la clase 300-399:

APENDICE II

- 1 Notas explicatorias sobre α y β**
- 2 Tabla XI comparación de α y β de ocho clases de la Biblioteca del ITAM**

Notas Explicatorias sobre α y β

Se mencionó que un alfa mayor indica que muchos libros continuarán siendo útiles por un tiempo largo. En la Tabla XI los parámetros de alfa, beta y otros valores de ocho clases han sido calculados. Hasta este momento hemos visto sobre el cálculo de α y β pero no acerca de los valores restantes presentados en la Tabla XI. Hay que mencionar que ellos serán discutidos más adelante en el cuerpo principal de este texto. Pero, una explicación breve sobre estos valores es necesaria para el mejor entendimiento de alfa y beta.

El lector recuerda que se discutió sobre el cálculo de alfa y beta de la clase 300-399.⁸ Estos dos parámetros pertenecen a los libros que circularon durante el mes de septiembre de 1984 (el mes de la muestra) y por lo tanto representan los libros activos (en este texto α y α_a se utilizan indistintamente: $\alpha = \alpha_a$). Por otra parte α_M representa el alfa de los libros activos más los libros potenciales* y se obtienen por la fórmula

* Los libros potenciales, N_p , son los libros que no circularon en el mes de muestra (septiembre 1984) ni en los 11 meses anteriores: $N_p = N_M - N_a$.

$\alpha_M = C \cdot \alpha_a$, en donde C^{**} es la fracción de los libros activos entre los libros vivos^{***} y α_a es el alfa calculada en la Tabla 1.

La ecuación $\alpha_M / (1 - \beta^{****})$ es la expresión del proceso Markov cuando un sistema entra en su estado de equilibrio. Esto significa que el promedio final de los libros en cada clase va a llegar a su estado estable y serán las cifras en la columna 5. Por ejemplo el promedio final de los libros que circularon en la clase 300-399 será 1.990 en el futuro.

$R_M(0), R_M(1), R_M(2)$ y $R_M(3)$ son los promedios de la circulación de los libros activos y potenciales en los períodos de 83-84, 84-85, 85-86 y 86-87 respectivamente. Si realizamos el cálculo para $R_M(4), R_M(5) \dots$ y así sucesivamente, los valores calculados deben acercarse, poco a poco, a los valores en la Columna 5.

** $C = N_a / N_M$ en donde N_a son los libros que circularon en el mes de la muestra y en los 11 meses anteriores y N_M es la suma de N_a más los libros potenciales: $N_M = N_a + N_p$.

*** Los libros vivos, N_M , son los libros activos que circularon en el mes de la muestra y en los 11 meses anteriores más los libros potenciales que no circularon pero tienen potenciales para circular.

**** En el Apéndice III se amplia el concepto del estado de equilibrio del proceso de Markov.

Volviendo a la Tabla XI se puede observar que el promedio de la circulación para la clase 300-399 en el año 86-87, $R_M(3)$, es igual al 1.990 que es lo mismo en la columna 5. Si el cálculo se realiza para $R_M(4)$ y $R_M(5)$ nos da el mismo valor. Podemos explicar que el promedio final para la clase 500-599 sucedió en el 85-86 [$R_M(2)=2.270$] que es lo mismo que $R_M(3)$ en el año 86-87.

En la Tabla XI, parte B, los valores de α_M han sido ordenados en forma decreciente. Observamos que las cuatro primeras clases (500-599, 600-699, 100-199, 300-399) tienen los α_M mayores que las clases restantes. Precisamente son las clases que apoyan a las carreras existentes en el ITAM (Administración, Ciencias Sociales, Cómputo, Derecho, Economía, Matemáticas).

En la Tabla XI, parte C, los valores de β han sido ordenados en manera decreciente. Se mencionó que beta representa la rapidez con la que el promedio de circulación de una clase de libros se acerca a su promedio final o a su estado de equilibrio. Apreciamos que la clase 500-599 se acerca más rápido a su estado estable que la de 900-999 porque la beta de aquella es mucho menor que ésta (0.072 en comparación con 0.882). Esto es obvio cuando comparamos $R_M(3)$ de la clase 500-599 con el de 900-999; siendo 2.270 y 1.040 respectivamente. En realidad la clase 500-599 ya ha entrado en su estado estable en el año 85-86 y la clase 900-999 no ha entrado, ni siquiera en el año 86-87.

Tabla XI comparación de α y β de ocho clases* de la Biblioteca del ITAM

1 CLASE	2 α	3 β	4 α_M	A				
				5 $\alpha_M/1-\beta$	$R_M(0)$	$R_M(1)$	$R_M(2)$	$R_M(3)$
00-99	0.933	0.227	0.676	0.875	1.260	0.962	0.894	0.879
100-199	2.087	0.393	1.602	2.640	1.740	2.290	2.500	2.580
200-299	0.694	0.250	0.441	0.588	0.640	0.601	0.591	0.589
300-399	2.011	0.224	1.544	1.990	1.740	1.930	1.980	1.990
500-599	2.673	0.072	2.106	2.270	2.040	2.250	2.270	2.270
600-699	2.444	0.194	1.831	2.272	1.440	2.110	2.240	2.270
800-899	0.519	0.082	0.342	0.373	0.770	0.405	0.375	0.373
900-999	0.241	0.882	0.164	1.390	0.880	0.940	0.993	1.040

B		C	
α_M	CLASE	β	CLASE
2.106	500-599	0.882	900-999
1.831	600-699	0.393	100-199
1.602	100-199	0.227	00-99
1.544	300-399	0.250	200-299
0.676	00-99	0.224	300-399
0.441	200-299	0.194	600-699
0.342	800-899	0.082	800-899
0.164	900-999	0.072	500-599

* Durante el mes de septiembre ningún libro circuló en la clase 400-499. El número de libros en la clase 700-799 que circularon en el mes de muestra, eran 9 pero los datos de circulaciones de dichos libros no fueron suficientes para el cálculo de α y β . Estas son las razones por las que no se incluyeron las clases 400 y 700 en esta Tabla.

APENDICE III

- 1 Notas explicatorias.**
- 2 Tabla XII, Matriz de Probabilidad Transicional de la clase 300-399, $t=1$**
- 3 Tabla XIII, Matriz de Probabilidad Transicional de la clase 300-399, $t=2$**
- 4 Tabla XIV, Matriz de Probabilidad Transicional de la clase 300-399, $t=4$**
- 5 Tabla XV, Matriz de Probabilidad Transicional de la clase 300-399, $t=8$**

Notas Explicatorias

La Tabla XII, Matriz de Probabilidad Transicional se calcula por la fórmula (11) y se trata de la probabilidad de una clase de libros que tendrán n circulación en el año $t+1$, dado que circularon m veces en el año t . Por ejemplo, los libros que tenían 9 circulaciones ($m=9$) en el año t , tendrán 0.018, 0.072, 0.145, 0.194, 0.195, 0.157, 0.106, 0.061, 0.031, 0.014, 0.006, 0.002, 0.001, 0.000, 0.000, 0.000 y 0.000 probabilidades que circulan 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, y 17 veces respectivamente en el año $t+1$. Por lo tanto, si se multiplican las probabilidades de n circulación por el número de la circulación y se suman los resultados debe darnos el promedio esperado. Esto fue calculado para el valor de $N(9)=4.02$ utilizando la fórmula (9), $N(m)=nT_{mn}$ para $n=0,1,2,..17$.

En la sección de cálculo de los parámetros de α y β y en el Apéndice II, comparación de α y β de ocho clases de la Biblioteca del ITAM, nos referimos al promedio final o el estado de equilibrio de una clase de libros. Es oportuno ampliar un poco con datos concretos para aquellos lectores que tienen dificultad para asimilar este concepto. Pero antes, algunas declara-

ciones matemáticas.

El proceso de Markov-Poisson es una cadena discreta de Markov que se define como: si el sistema está en el estado m en el tiempo t , la probabilidad transicional que estará en el estado n en el tiempo $t+1$, para α y $\beta < 1$, está expresado en la forma:

$$(11) \quad T_{mn} = \frac{(\alpha + \beta m)^n e^{-(\alpha + \beta m)}}{n!}$$

Aplicando la fórmula (11) para diferentes valores de m y n se obtiene la Tabla XII que es la matriz de la probabilidad transicional para un período definido; en el caso de esta matriz es para el período octubre 1, 1983-Septiembre 30, 1984 que es un año.

Para el cálculo de la matriz de la probabilidad transicional de otros períodos, es decir, el segundo año, tercer, año, etc. utilizamos el álgebra de matrices. Una matriz se define como un arreglo o grupo de números. Se puede apreciar que la matriz en la Tabla XII, corresponde a esta definición.

En el álgebra de matrices el k -ésimo potencia de una matriz se encuentra al mutiplicar la matriz por sí k veces. Por ejemplo, la matriz transicional de k^2 será $P^2 = P \cdot P$ o alternativamente P^2, P siendo la matriz inicial; y la matriz transicional de k^3 será $P^2 \cdot P$ o P^3 . Mostramos este concepto en su expresión algebraica. Supongamos que tenemos la siguiente matriz:

$$P = \begin{matrix} & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & P_{11} & P_{12} \\ \alpha_2 & P_{21} & P_{22} \end{matrix}$$

Como se puede observar esta matriz es de tipo 2 x 2 debido a - que posee 2 filas y 2 columnas. P_{11} y P_{12} son los elementos en la fila uno y columnas 1 y 2 respectivamente; P_{21} es elemento de matriz en la fila 2 y columna uno y P_{22} elemento de matriz en la fila 2 y columna 2. Se refiere a α_1 y α_2 como estado α_1 y α_2 .

El cálculo de $P^{(2)}$, como se mencionó, será multiplicar la matriz de P entre sí. Por lo tanto tenemos:

$$P^{(2)} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$$

Para realizar esta multiplicación, es necesario multiplicar - cada elemento de cada fila por cada elemento correspondiente - de cada columna y sumarlos para obtener el primer elemento de la nueva matriz y así sucesivamente para encontrar el segundo, tercero y cuarto elemento. Por ende tenemos:

$$P^{(2)} = \begin{pmatrix} P_{11}P_{11}+P_{12}P_{21} & P_{11}P_{12}+P_{12}P_{22} \\ P_{21}P_{11}+P_{22}P_{21} & P_{21}P_{12}+P_{22}P_{22} \end{pmatrix}$$

Regresamos, ahora, a la Tabla XII, matriz transicional de la - clase 300-399 y calculamos solamente dos valores de 0.089 y - 0.212 de la Tabla XIII, o sea T_{00} y T_{01} que son el primer y se gundo elemento en la fila cero y columnas cero y uno respecti-

vamente.

$$T_{00} = (0,134)(0,134) + (0,269)(0,107) + (0,271)(0,086) + (0,181)(0,068) + (0,091)(0,055) + (0,037)(0,044) + (0,012)(0,035) + (0,004)(0,028) + (0,001)(0,022) + (0,000)(0,018) + \dots (0,000)(0,003) = 0,089$$

$$T_{01} = (0,134)(0,269) + (0,269)(0,239) + (0,271)(0,210) + (0,181)(0,183) + (0,091)(0,159) + (0,037)(0,137) + (0,012)(0,117) + (0,004)(0,100) + (0,001)(0,085) + (0,000)(0,072) + \dots (0,000)(0,017) = 0,212$$

De la misma manera los demás elementos de la Tabla XIII se pueden obtener.

La expresión matemática de los cálculos de los elementos de T^2_{mn} y T^{t+1}_{mn} serán expresados en la siguiente manera:

$$T^2_{mn} = \sum T_{mk} T_{kn}$$

$$T^{t+1}_{mn} = \sum T^t_{mk} T_{kn}$$

Cuando $t \rightarrow \infty$ la matriz T^t_{mn} llega a su estado estable en el cual todos los valores de las filas son iguales. Esto se define como:

$$T^t_{mn} \rightarrow P^{\infty}_n$$

Además, si el sistema empieza en el tiempo $t=0$ y en el estado m , entonces el valor promedio de n en el tiempo t cuando $t \rightarrow \infty$ será:

$$\bar{n}_m(t) = \sum_n n T^t_{mn} = \alpha \frac{1 - \beta^t}{1 - \beta} + m\beta \rightarrow \frac{\alpha}{1 - \beta}$$

Se puede observar, en la Tabla XIV, que los valores en cada fila son casi iguales y la matriz ha llegado a su estado de equi

librio. Para mostrar este concepto con más claridad, hemos calculado la matriz transicional de $t=8$, tabla XV, donde los valores se repiten, sin ninguna variación, en cada fila.

TABLA XII

Matriz de Probabilidad Transicional de la clase 300-399, t=1

BETA = .224 ; ALFA = 2.011

n =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
m	T _{mn}																
0	0.134	0.269	0.271	0.181	0.091	0.037	0.012	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.107	0.239	0.267	0.199	0.111	0.050	0.019	0.006	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.086	0.210	0.259	0.212	0.130	0.064	0.026	0.009	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	0.068	0.183	0.246	0.220	0.148	0.079	0.035	0.014	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4	0.055	0.159	0.231	0.224	0.163	0.095	0.046	0.019	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5	0.044	0.137	0.214	0.223	0.175	0.110	0.057	0.026	0.010	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6	0.035	0.117	0.196	0.220	0.184	0.124	0.069	0.033	0.014	0.005	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7	0.028	0.100	0.179	0.213	0.191	0.137	0.081	0.042	0.019	0.007	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
8	0.022	0.085	0.161	0.204	0.194	0.148	0.094	0.051	0.024	0.010	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
9	0.018	0.072	0.145	0.194	0.195	0.157	0.106	0.061	0.031	0.014	0.006	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
10	0.014	0.061	0.129	0.182	0.194	0.165	0.117	0.071	0.038	0.018	0.008	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
11	0.011	0.051	0.114	0.170	0.190	0.170	0.127	0.081	0.045	0.023	0.010	0.004	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
12	0.009	0.043	0.101	0.157	0.185	0.174	0.136	0.091	0.054	0.028	0.013	0.006	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
13	0.007	0.036	0.088	0.145	0.178	0.175	0.144	0.101	0.062	0.034	0.017	0.008	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000
14	0.006	0.030	0.077	0.132	0.170	0.175	0.150	0.110	0.071	0.041	0.021	0.010	0.004	0.002	0.001	0.000	0.000
15	0.005	0.025	0.067	0.120	0.161	0.173	0.155	0.119	0.080	0.048	0.026	0.012	0.006	0.002	0.001	0.000	0.000
16	0.004	0.021	0.058	0.108	0.152	0.170	0.158	0.127	0.089	0.055	0.031	0.016	0.007	0.003	0.001	0.000	0.000

TABLA XIII

Matriz de Probabilidad Transicional de la clase 300-399, t=2

BETA = .224 ; ALFA = 2.011

n =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
m	T _{2mn}																
0	0.089	0.212	0.255	0.207	0.129	0.065	0.028	0.010	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.085	0.206	0.252	0.209	0.132	0.068	0.030	0.011	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.082	0.200	0.250	0.211	0.136	0.071	0.032	0.012	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	0.078	0.195	0.247	0.212	0.139	0.075	0.034	0.014	0.005	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4	0.075	0.189	0.244	0.213	0.143	0.078	0.036	0.015	0.005	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5	0.071	0.184	0.241	0.214	0.146	0.081	0.038	0.016	0.006	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6	0.068	0.178	0.237	0.215	0.149	0.084	0.041	0.017	0.006	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7	0.065	0.173	0.234	0.216	0.152	0.088	0.043	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
8	0.062	0.168	0.231	0.216	0.155	0.091	0.045	0.020	0.008	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
9	0.060	0.163	0.227	0.216	0.158	0.094	0.048	0.021	0.008	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
10	0.057	0.158	0.224	0.216	0.160	0.097	0.050	0.023	0.009	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
11	0.055	0.153	0.221	0.216	0.163	0.100	0.053	0.024	0.010	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
12	0.052	0.149	0.217	0.216	0.165	0.103	0.055	0.026	0.011	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
13	0.050	0.144	0.213	0.216	0.167	0.106	0.058	0.027	0.012	0.005	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
14	0.048	0.140	0.210	0.215	0.169	0.109	0.060	0.029	0.013	0.005	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
15	0.046	0.135	0.206	0.214	0.171	0.112	0.063	0.031	0.013	0.005	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
16	0.044	0.131	0.203	0.214	0.173	0.115	0.065	0.032	0.014	0.006	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

TABLA XIV

Matriz de Probabilidad Transicional de la clase 300-399, t=4

BETA = .224 ; ALFA = 2.011

n =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
m	T4mn																
0	0.080	0.198	0.248	0.211	0.137	0.073	0.033	0.013	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.080	0.198	0.248	0.211	0.138	0.073	0.033	0.013	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.080	0.197	0.248	0.211	0.138	0.073	0.033	0.013	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	0.080	0.197	0.248	0.211	0.138	0.073	0.033	0.013	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4	0.080	0.197	0.247	0.211	0.138	0.074	0.033	0.013	0.005	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5	0.079	0.196	0.247	0.211	0.138	0.074	0.033	0.013	0.005	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6	0.079	0.196	0.247	0.212	0.138	0.074	0.034	0.013	0.005	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7	0.079	0.196	0.247	0.212	0.139	0.074	0.034	0.013	0.005	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
8	0.079	0.196	0.247	0.212	0.139	0.074	0.034	0.013	0.005	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
9	0.079	0.195	0.247	0.212	0.139	0.074	0.034	0.013	0.005	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
10	0.079	0.195	0.247	0.212	0.139	0.075	0.034	0.014	0.005	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
11	0.078	0.195	0.246	0.212	0.139	0.075	0.034	0.014	0.005	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
12	0.078	0.194	0.246	0.212	0.139	0.075	0.034	0.014	0.005	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
13	0.078	0.194	0.246	0.212	0.140	0.075	0.034	0.014	0.005	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
14	0.078	0.194	0.246	0.212	0.140	0.075	0.034	0.014	0.005	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
15	0.078	0.194	0.246	0.212	0.140	0.075	0.035	0.014	0.005	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
16	0.077	0.193	0.246	0.212	0.140	0.075	0.035	0.014	0.005	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

TABLA XV

Matriz de Probabilidad Transicional de la clase 300-399, t=8

BETA = .224 ; ALFA = 2.011

n =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
m	T8mn																
0	0.080	0.197	0.248	0.211	0.138	0.073	0.033	0.013	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.080	0.197	0.248	0.211	0.138	0.073	0.033	0.013	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.080	0.197	0.248	0.211	0.138	0.073	0.033	0.013	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	0.080	0.197	0.248	0.211	0.138	0.073	0.033	0.013	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4	0.080	0.197	0.248	0.211	0.138	0.073	0.033	0.013	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5	0.080	0.197	0.248	0.211	0.138	0.073	0.033	0.013	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6	0.080	0.197	0.248	0.211	0.138	0.073	0.033	0.013	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7	0.080	0.197	0.248	0.211	0.138	0.073	0.033	0.013	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
8	0.080	0.197	0.248	0.211	0.138	0.073	0.033	0.013	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
9	0.080	0.197	0.248	0.211	0.138	0.073	0.033	0.013	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
10	0.080	0.197	0.248	0.211	0.138	0.073	0.033	0.013	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
11	0.080	0.197	0.248	0.211	0.138	0.073	0.033	0.013	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
12	0.080	0.197	0.248	0.211	0.138	0.073	0.033	0.013	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
13	0.080	0.197	0.248	0.211	0.138	0.073	0.033	0.013	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
14	0.080	0.197	0.248	0.211	0.138	0.073	0.033	0.013	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
15	0.080	0.197	0.248	0.211	0.138	0.073	0.033	0.013	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
16	0.080	0.197	0.248	0.211	0.138	0.073	0.033	0.013	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

APENDICE IV

1 Desarrollo Matemático de la fórmula (36)

La expresión $C(1-\gamma)$ es común dentro de los corchetes y se puede factorizar:

$$(A) \quad P_0(t+1) = e^{-\alpha} \left\{ 1 - C + C(1-\gamma) \left[e^{-\beta} + \gamma e^{-2\beta} + \gamma^2 e^{-3\beta} + \gamma^3 e^{-4\beta} + \dots \right] \right\}$$

Factorizando $1/\gamma$ dentro de los corchetes de la fórmula (A) nos da:

$$(B) \quad P_0(t+1) = e^{-\alpha} \left\{ 1 - C + C \frac{1-\gamma}{\gamma} \left[\gamma e^{-\beta} + \gamma^2 e^{-2\beta} + \gamma^3 e^{-3\beta} + \gamma^4 e^{-4\beta} + \dots \right] \right\}$$

La expresión dentro de los corchetes de la fórmula (B) es igual al $\sum (\gamma e^{-\beta})^m$ por el siguiente razonamiento:

$$m=1 \quad (\gamma e^{-\beta})^1 = \gamma e^{-\beta}$$

$$m=2 \quad (\gamma e^{-\beta})^2 = \gamma \cdot \gamma \cdot e^{-\beta} \cdot e^{-\beta} = \gamma^2 e^{-2\beta}$$

$$m=3 \quad (\gamma e^{-\beta})^3 = \gamma \cdot \gamma \cdot \gamma \cdot e^{-\beta} \cdot e^{-\beta} \cdot e^{-\beta} = \gamma^3 e^{-3\beta}$$

$$m=4 \quad (\gamma e^{-\beta})^4 = \gamma \cdot \gamma \cdot \gamma \cdot \gamma \cdot e^{-\beta} \cdot e^{-\beta} \cdot e^{-\beta} \cdot e^{-\beta} = \gamma^4 e^{-4\beta}$$

El desarrollo de $\sum (\gamma e^{-\beta})^m$ nos da una serie armónica de tipo

$$X + X^2 + X^3 + X^4 + X \dots = \frac{X}{1-X}$$

Por lo tanto tenemos

$$(C) \quad (\gamma e^{-\beta})^1 + (\gamma e^{-\beta})^2 + (\gamma e^{-\beta})^3 + (\gamma e^{-\beta})^4 + \dots = \frac{\gamma e^{-\beta}}{1 - \gamma e^{-\beta}}$$

Ahora calculamos el valor de la expresión (c)

$$\gamma e^{-\beta} = \gamma \frac{1}{e^{\beta}} = \frac{\gamma}{e^{\beta}}$$

$$1 - \gamma e^{-\beta} = 1 - \gamma \frac{1}{e^{\beta}} = 1 - \frac{\gamma}{e^{\beta}} = \frac{e^{\beta} - \gamma}{e^{\beta}}$$

Dividimos los resultados

$$\frac{\gamma}{e^{\beta}} \div \frac{e^{\beta} - \gamma}{e^{\beta}} = \frac{\gamma}{e^{\beta}} \times \frac{e^{\beta}}{e^{\beta} - \gamma} = \frac{\gamma}{e^{\beta} - \gamma}$$

Insertamos el valor de $\gamma/e^{\beta} - 1$ dentro de los corchetes en la expresión (B)

$$P_0(t+1) = e^{-\alpha} \left[1 - C + C \frac{1 - \gamma}{\gamma} \left(\frac{\gamma}{e^{\beta} - \gamma} \right) \right]$$

Eliminamos gamma en denominador y nominador

$$(D) \quad P_0(t+1) = e^{-\alpha} \left[1 - C + C \left(\frac{1 - \gamma}{e^{\beta} - \gamma} \right) \right]$$

Factorizamos C dentro de los corchetes de la expresión (D)

$$(E) \quad P_0(t+1) = e^{-\alpha} \left\{ 1 - C \left[1 - \frac{1 - \gamma}{e^{\beta} - \gamma} \right] \right\}$$

Calculamos el valor dentro de los corchetes de la expresión (E)

$$(F) \quad 1 - \frac{1-\gamma}{e^{\beta-\gamma}} = \frac{e^{\beta}\gamma - 1 + \gamma}{e^{\beta}-1} = \frac{e^{\beta}-1}{e^{\beta-\gamma}}$$

Insertamos el valor de la expresión (F) en la expresión (E)

$$(G) \quad P_0(t+1) = e^{-\alpha} \left[1 - c \left(\frac{e^{\beta}-1}{e^{\beta-\gamma}} \right) \right]$$

Agregamos $-1+1$ en el denominador de la expresión (G)

$$(H) \quad P_0(t+1) = e^{-\alpha} \left\{ 1 - c \left[\frac{e^{\beta}-1}{(e^{\beta}-1) + (1-\gamma)} \right] \right\}$$

Dividimos uniformemente el valor dentro de los corchetes de la expresión (H) entre $e^{\beta}-1$

$$(I) \quad \frac{e^{\beta}-1}{e^{\beta}-1} / \frac{(e^{\beta}-1) + (1-\gamma)}{e^{\beta}-1} = 1 / \frac{e^{\beta}-1}{e^{\beta}-1} + \frac{1-\gamma}{e^{\beta}-1} = 1 / 1 + \frac{1-\gamma}{e^{\beta}-1}$$

Insertamos el resultado de la expresión (I) en la expresión (H) y utilizamos el subíndice (t)

$$P_0(t+1) = e^{-\alpha} \left[1 - c(t) \frac{1}{1 + \frac{1-\gamma(t)}{e^{\beta}-1}} \right] = e^{-\alpha} \left[1 - \frac{c(t)}{1 + \frac{1-\gamma(t)}{e^{\beta}-1}} \right]$$

Para hacer esta fórmula más compacta ponemos $\frac{1-\gamma(t)}{e^{\beta}-1}$ igual al $J(t)$

$$P_0(t+1) = e^{-\alpha} \left[1 - \frac{c(t)}{1+J(t)} \right]$$

Por último ponemos $c(t)/1+J(t)$ igual al $H(t)$

$$P_0(t+1) = e^{-\alpha} \left[1 - H(t) \right]$$

APENDICE VI

- 1 Notas explicativas sobre $4M(j)$ y $4N(j)$**
- 2 Tabla XIX Cálculos de $N(j)$ y $NP(j)$ cuando se eligen cuatro meses de muestra**
- 3 Tabla XX Primer método de Cálculo de $N(j)$ y $NP(j)$**
- 4 Tabla XXI Segundo método de Cálculo de $N(j)$ y $NP(j)$**

GRAFICA 1

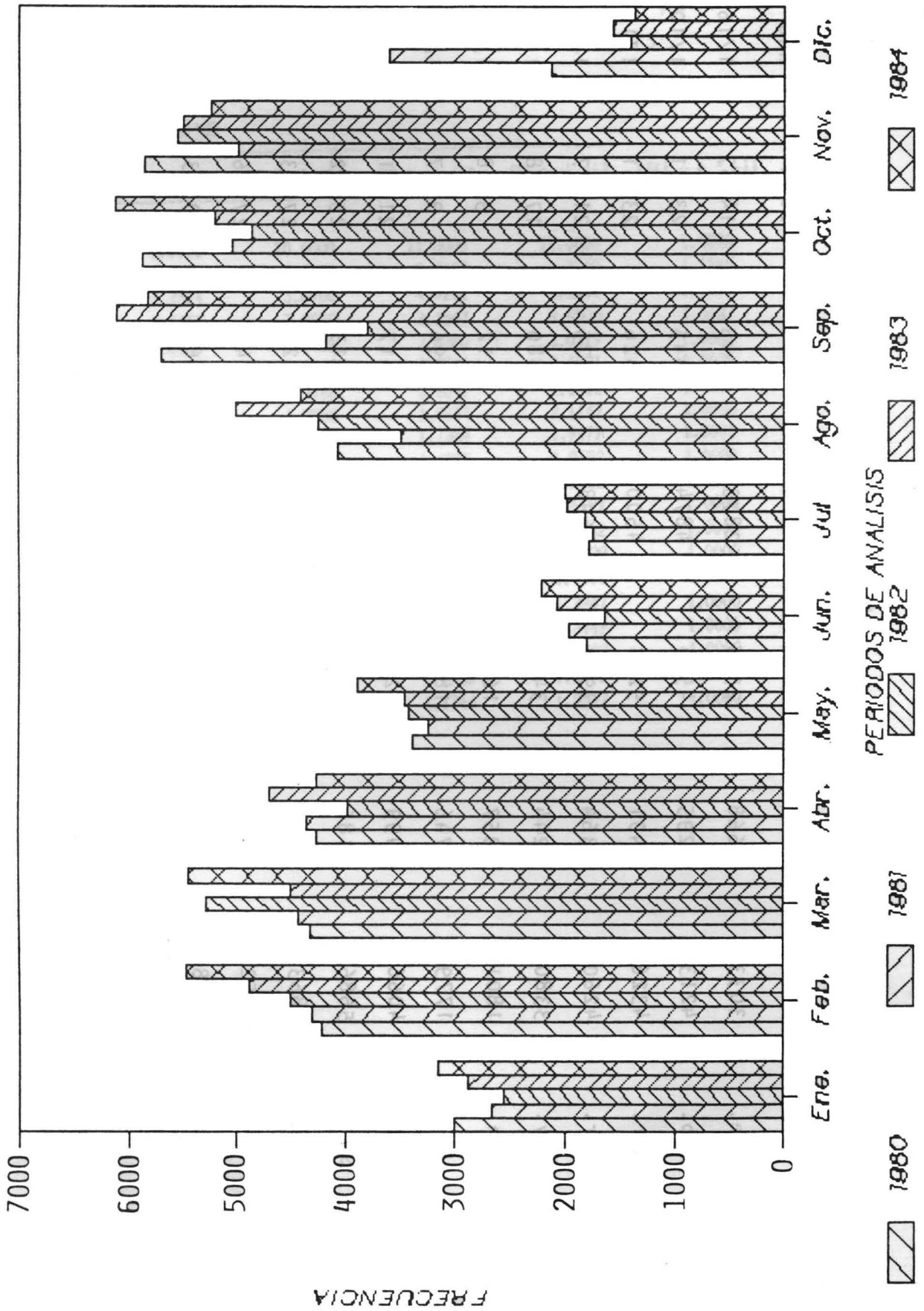


TABLA XVI
 Datos de la Circulación y Valores de Rho

MES	1980	1981	1982	1983	1984	SUMA	RHO
Ene.	3033	2668	2568	2873	3145	14287	1/16
Feb.	4213	4295	4504	4874	5445	23331	1/10
Mar.	4326	4431	5268	4500	5426	23951	1/10
Abr.	4260	4364	3980	4698	4275	21577	1/11
May.	3380	3244	3420	3454	3880	17378	1/13
Jun.	1801	1957	1639	2069	2212	9678	1/24
Jul.	1779	1746	1829	1977	1996	9327	1/25
Ago.	4066	3499	4255	5014	4417	21251	1/11
Sept.	5686	4186	3803	6094	5813	25582	1/9
Oct.	5863	5033	4854	5197	6126	27073	1/9
Nov.	5852	4993	5537	5481	5243	27106	1/9
Dic.	2118	3610	1414	1578	1363	10083	1/23
S							
U							
M	46377	44026	43071	47809	49341	230624	
A							

TABLA XVII

Cálculos de $1/[1-(1-\rho)^j]$ y $1/(1-e^{-j})$ para los
Valores de $\rho = 1/9, 1/10, 1/11$ y $1/13$

$1/[1-(1-\rho)^j]$					
j	$\rho = 1/9$	$\rho = 1/10$	$\rho = 1/11$	$\rho = 1/13$	$1/(1 - e^{-j})$
1	9.0000	10.0000	11.0000	13.0000	1.5820
2	4.7647	5.2632	5.7619	6.7600	1.1565
3	3.3594	3.6900	4.0212	4.6844	1.0524
4	2.6617	2.9078	3.1547	3.6500	1.0187
5	2.2468	2.4419	2.6380	3.0319	1.0068
6	1.9734	2.1342	2.2961	2.6221	1.0025
7	1.7908	1.9168	2.0541	2.3312	1.0009
8	1.6387	1.7558	1.8744	2.1147	1.0003
9	1.5301	1.6324	1.7364	1.9477	1.0001
10	1.4450	1.5353	1.6275	1.8153	1.0000
11	1.3769	1.4573	1.5396	1.7082	1.0000
12	1.3216	1.3936	1.4676	1.6199	1.0000
13	1.2760	1.3408	1.4078	1.5462	1.0000
14	1.2380	1.2966	1.3575	1.4839	1.0000
15	1.2061	1.2593	1.3147	1.4306	1.0000
16	1.1791	1.2274	1.2782	1.3847	1.0000
17	1.1561	1.2002	1.2466	1.3449	1.0000
18	1.1364	1.1766	1.2193	1.3102	1.0000
19	1.1194	1.1562	1.1955	1.2796	1.0000
20	1.1048	1.1384	1.1746	1.2527	1.0000

TABLA XVIII

Cálculos de $1/(1-(1-\rho)^j)$ y $1/(1-e^{-j})$ para los
Valores de $\rho=1/16, 1/23, 1/24$ y $1/25$

1/(1-(1-R0)^j)					
j	R0 = 1/16	R0 = 1/23	R0 = 1/24	R0 = 1/25	1/(1 - e^-j)
1	16.0000	23.0000	24.0000	25.0000	1.5820
2	8.2581	11.7556	12.2553	12.7551	1.1565
3	5.6810	8.0099	8.3428	8.6757	1.0524
4	4.3951	6.1389	6.3883	6.6377	1.0187
5	3.6258	5.0178	5.2170	5.4163	1.0058
6	3.1146	4.2716	4.4373	4.6032	1.0025
7	2.7510	3.7396	3.8814	4.0233	1.0009
8	2.4797	3.3416	3.4654	3.5892	1.0003
9	2.2698	3.0328	3.1426	3.2524	1.0001
10	2.1029	2.7866	2.8850	2.9836	1.0000
11	1.9673	2.5857	2.6749	2.7643	1.0000
12	1.8551	2.4189	2.5004	2.5820	1.0000
13	1.7610	2.2784	2.3533	2.4284	1.0000
14	1.6810	2.1584	2.2277	2.2971	1.0000
15	1.6124	2.0549	2.1193	2.1838	1.0000
16	1.5530	1.9648	2.0248	2.0851	1.0000
17	1.5011	1.8857	1.9419	1.9983	1.0000
18	1.4555	1.8158	1.8686	1.9216	1.0000
19	1.4152	1.7536	1.8033	1.8533	1.0000
20	1.3794	1.6979	1.7449	1.7921	1.0000

APENDICE VI

- 1 Notas explicativas sobre $4M(j)$ y $4N(j)$**
- 2 Tabla XIX Cálculos de $N(j)$ y $NP(j)$ cuando se eligen cuatro meses de muestra**
- 3 Tabla XX Primer método de Cálculo de $N(j)$ y $NP(j)$**
- 4 Tabla XXI Segundo método de Cálculo de $N(j)$ y $NP(j)$**

Notas explicativas

Como se mencionó antes, la predicción de la circulación tiene mayor confiabilidad si en lugar de un mes, analizamos la circulación de libros en cuatro meses: uno de alta, uno de baja, uno de media alta y uno de media baja circulación. Por lo tanto, tenemos cuatro alfas, cuatro betas, $4M(j)$ y $4N(j)$. Aplicando las fórmulas (4) y (5) nos da el promedio de alfa y beta. Este apéndice pretende explicar el cálculo del promedio de $4M(j)$ y $4N(j)$.

Para mostrar los procedimientos necesarios, presentamos la Tabla XIX con datos ficticios. Se puede observar que $4M(j)$ es la suma de los $M(j)$ en los meses uno, dos, tres y cuatro - (60=14+18+20+8 así sucesivamente para los siguientes datos) con 24, 24, 23 y 24 libros desconocidos respectivamente. Aplicamos la fórmula (44) y los $4M(j)$ para corregirlos pero hay - que tomar en cuenta que la fórmula (44) es aplicable cuando el mes de la muestra es solamente uno. En caso de cuatro meses la modificación de la fórmula (44) será:

$$4M(j) = 4M(j) \times 4M(j) + \Sigma 4M(j) + \Sigma U / \Sigma 4M(j)$$

Por ejemplo el valor corregido de $4M(1)$ es 77 y - - - - -
 $77 = 60 (339 + 95) / 339$. Multiplicando todos los valores en - -

la columna 6 por $(339+95)/339$, factor de corrección de los libros desconocidos, nos da los valores de $4M(j)$, Los valores en la columna 7 son $4M(j)$ corregidos de cuatro meses; por lo tanto al dividirlos entre 4 nos da el promedio de $M(j)$ corregidos (Columna 8).

Se mencionó que a partir del $M(j)$ se puede calcular $N(j)$ aplicando la fórmula (43). Por ende, tomamos los valores de $4M(j)$ corregidos, en la columna 7, y utilizamos la fórmula (43) para el cálculo de $4N(j)$. Dividimos $4N(j)$, en la columna 9 entre 4 obtenemos los valores de $N(j)$ en la columna 10.

Los valores de $N(j)$ geométricos y los libros potenciales, $NP(j)$, se calculan por las fórmulas (46) y (45) respectivamente una vez que los $M(j)$ y $N(j)$ fueron calculados. Como se puede observar todos estos procedimientos son para llegar a los $N(j)$ y $NP(j)$: datos en las columnas 10 y 12.

El valor de rho si elegimos 4 meses de alta, baja, media alta y media baja circulación será $1/12$ puesto que estos meses, en promedio, cubren $1/12$ de la circulación anual.

A continuación, el autor presenta las tablas XX y XXI donde los valores de $N(j)$ y $N(j,0)$ han sido calculados por dos formas. Primero se tomaron los datos de la columna 6, Tabla XIX, y se calcularon $4N(j)$ y $4N(j,0)$, es necesario dividirlos entre 4 para obtener sus promedios. Segundo, es posible divi-

dir los valores de la columna 6, Tabla XIX, entre 4 para el cálculo del promedio de $M(j)$ y a partir de ello calcular $N(j)$ y $N(j,0)$. Las tablas XX y XXI muestran la primera y la segunda forma respectivamente.

TABLA XIX Cálculo de $N(j)$ y $N_p(j)$ cuando se eligen 4 meses de muestra

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<u>M(j)-1984</u>					<u>CORREGIDA</u>			<u>GEOMETRICA</u>			
j	Mes(1)	Mes(2)	Mes(3)	Mes(4)	4M(j)	4M(j)	M(j)	4N(j)	N(j)	N(j)	$N_p(j)$
1	14	18	20	8	60	77	19	922	231	231	365
2	20	19	18	11	68	87	22	545	136	140	158
3	22	17	11	19	69	88	22	384	96	85	101
4	13	12	13	11	49	63	16	213	53	52	54
5	5	8	7	15	35	45	11	127	32	32	32
6	5	6	7	6	24	31	8	76	19	19	19
7	3	1	1	7	12	15	4	34	9	12	9
8	5	1	3	2	11	14	4	28	7	7	7
9	2	1	1	1	5	6	2	12	3	4	3
10	1		2	1	4	5	1	9	2	3	2
11								0		2	0
12				1	1	1		2	1	1	
13				1	1	1		2		1	
TOTAL	90	83	83	83	339	433	109	2354	589	589	750
D	24	24	23	24	95						

TABLA XX
Primer método

PARA VALOR DE RO = 1 / 12
*PARA VALOR DE D = 95

DISTRIBUCION NO CORREGIDA DE LA CLASE FICTICIA

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	suma
M(j)	60	68	69	49	35	24	12	11	5	4	0	1	1	339
N(j)	720	426	300	167	99	59	26	22	9	7	0	2	1	1838
Geom	720	438	266	162	99	60	36	22	14	8	5	3	2	1835

DISTRIBUCION CORREGIDA DE LA CLASE FICTICIA

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	suma
N(j)	922	545	384	213	127	76	34	28	12	9	0	2	2	2354
Geom	922	561	341	208	126	77	47	28	17	11	6	4	2	2350

DISTRIBUCION DE LIBROS ACTIVOS Y POTENCIALES
DE LA CLASE FICTICIA

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	suma
**N(j)	922	545	384	213	127	76	34	28	12	9	0	2	2	2354
**N(j,0)	1458	630	405	217	128	76	34	28	12	9	0	2	2	3001

* El valor de D=95 se calculó por $24+24+23+24=95$ en la Tabla XIX

** Hay que dividir los valores de N(j) y N(j,0) entre 4 puesto que fueron calculados a partir de $4M(j)$.

TABLA XXI

Segundo método

PARA VALOR DE RO = 1 / 12
 * PARA VALOR DE D = 24

DISTRIBUCION NO CORREGIDA DE LA CLASE FICTICIA

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	suma
M(j)	15	17	17	12	9	6	3	3	1	1	0	0	0	84
N(j)	180	106	74	41	26	15	7	6	2	2	0	0	0	458
Geom	180	109	66	40	24	15	9	5	3	2	1	1	0	457

DISTRIBUCION CORREGIDA DE LA CLASE FICTICIA

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	suma
N(j)	231	137	95	52	33	19	8	8	2	2	0	0	0	588
Geom	231	140	85	52	31	19	12	7	4	3	2	1	1	588

DISTRIBUCION DE LIBROS ACTIVOS Y POTENCIALES
DE LA CLASE FICTICIA

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	suma
**N(j)	231	137	95	52	33	19	8	8	2	2	0	0	0	588
**N(j,0)	366	158	100	53	33	19	8	8	2	2	0	0	0	751

* El valor de D=24 se calculó por $24+22+23+24/4=24$ en la Tabla XIX

** No es necesario dividir los valores de N(j) y N(j,0) entre 4, puesto que estos valores fueron calculados a partir de M(j) y no de 4M(j).

APENDICE VII

1 Glosario de Símbolos

GLOSARIO DE SIMBOLOS

SIMBOLO	DEFINICION
C	Fracción de libros activos (N_a) entre libros activos y potenciales (N_M)
$C(t)$	Fracción de libros activos (N_a) entre número total de libros en t-esimo año
D	Número de libros por la cual el valor de j es desconocido
e	=2.718, base logaritmo natural
$F(j)$	Fracción de libros que circulan más que j veces
j, m, n	Número de circulación
M	Número total de ejemplares en la muestra
$M(a)$	Número de libros circulados durante el período de la muestra.
$M(j)$	Número de $M(a)$ libros circulados j veces durante el año anterior al final del período de muestra.
$M(m)$	Número de ejemplares con m circulación en el año t
N	Número total de libros en la colección

GLOSARIO DE SIMBOLOS

SIMBOLO	DEFINICION
N_a	Número de libros activos
N_d	Número de libros muertos
N_M	Número de libros activos más potenciales
N_{mn}	Número de libros con m circulación en el año t y n circulación en el año t+1
N_o	Número de libros inactivos
N_p	Número de libros potenciales
$N(j)$	Número esperado de libros con j circulación durante el año
$N(>j)$	Número esperado de libros circulados más que j veces
$N(m)$	Promedio de la circulación durante el año t+1 dado que la muestra tiene m circulación en el año t
$n!$	n factorial= 1.2.3...(n-1)n
$P(k)$	Probabilidad de k ocurrencia

GLOSARIO DE SIMBOLOS

SÍMBOLO	DEFINICION
$P(> m)$	Probabilidad, o fracción de m circulación o más
$P(n m)$	Probabilidad condicional de n dado m ocurrencias
$P_0(t)$	Fracción de libros inactivos en el t-esimo año
\bar{R}	Promedio de la circulación
R_a	Promedio de la circulación de los libros inactivos
R_M	Promedio de la circulación de los libros activos y potenciales
$R_a N_a$	Circulación total de un período dado
t	Intervalo de tiempo
T_{mn}	Probabilidad transicional en el Proceso de Markov
α y β	Parámetros Markovianos de la circulación
γ	Parámetro de circulación en la distribución geométrica
λ	Número de ocurrencia por intervalo
ρ	Fracción de tiempo

BIBLIOGRAFIA 6

1. BOOKSTEIN, Abraham. "On Morse-Chen book-use model". **Library Quarterly** 45:195-198, 1975.
2. BROWNSEY, K.W.R.; Burrel, Q.L. "Library circulation distribution: some observation on the PLR sample". **Journal of Documentation** 42:22-45, 1986.
3. CHEN, Ching-Chin. **Application of operations research models to Libraries**. -- Cambridge, Mass. : MIT Press, 1976.
4. FUSSLER, H.H.; Simon, J.L. **Patterns in the use of books in Large Research Libraries**. -- Chicago, Il. : University of Chicago Press, 1969.
5. HINDLE, A. "Markov models of book obsolescence". -- **Information processing & management** 15:17-18, 1979.
6. HOFFMAN, A.C. "Monograph duplication in the Kresge Center for Teaching Resources at Lesley College". -- En Ching-Chin Chen, ed. **Quantitative measurements and dynamic library services**. -- Phoenix, Az. : Oryx Press, 1978.
7. KRAFT, D.G. "A comment on the Morse-Elston model of probabilistic obsolescence". -- **Operations Research** 18:1228-1233, 1970.
8. MORSE, P.M.; Kimble, G.E. **Methods of operations research**. -- Cambridge, Mass. : MIT Press, 1951
9. MORSE, P.M. **Library effectiveness : a systems approach**. -- Cambridge, Mass. : MIT Press, 1968.
10. MORSE, P.M. "Measures of Library Effectiveness". -- **Library Quarterly** 42:15-30, 1972.

11. MORSE, P.M.; Chen Ching-Chin. "Using circulation desk data to obtain unbiassed estimates of book use". -- **Library Quarterly** 45:179-194, 1975.
12. RAVICHANDRA RAO, I.K. "Document and user distributions". -- **Library science with a slant to Documentation** 19:69-86, 1982.
13. SCHORRIG, C. "Sizing Up the space problem in academic libraries". -- En: D. Gore, Ed. **Farewell to Alexandria**. -- Westport, CT : Greenwood Press, 1976.
14. SPURLOCK, S.; Yen, E. "A study of life sciences book use in M.I.T. science library : budgetary implications". -- En: Ching-Chin, Ed. **Quantitative measurements and dynamic library services**. -- Phoenix, Az. : Oryx Press, 1978.
15. TRUESWELL, R.W. "Two characteristics of circulation". -- **College and research Libraries** 25:285-291, 1964.
16. TRUESWELL, R.W. "A quantitative measure of user circulation requirements and its possible effect on stack thinning and multiple copy determination". -- **American documentation** 16:20-15, 1965.
17. TRUESWELL, R.W. "Some behavioral patterns of library users The 80/20 Rule". -- **Wilson Library Bulletin** 43:458-461, 1969.
18. WALL, T. "Distribution of use among users of an Academic Library Collection". -- **Library research** 2:177-180, 1980-1981.

Modelos matemáticos Morse-Markov.
La edición consta de 1000 ejemplares y estuvo a cargo de Pilar Rodríguez Ramos/Centro Universitario de Investigaciones Bibliotecológicas/UNAM, se terminó de imprimir en Impresos y Papelería Montes el 15 de marzo de 1988.